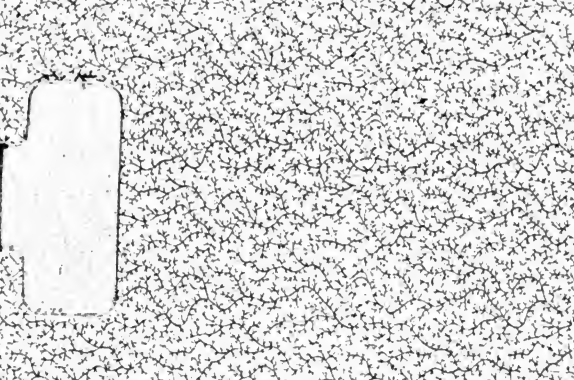
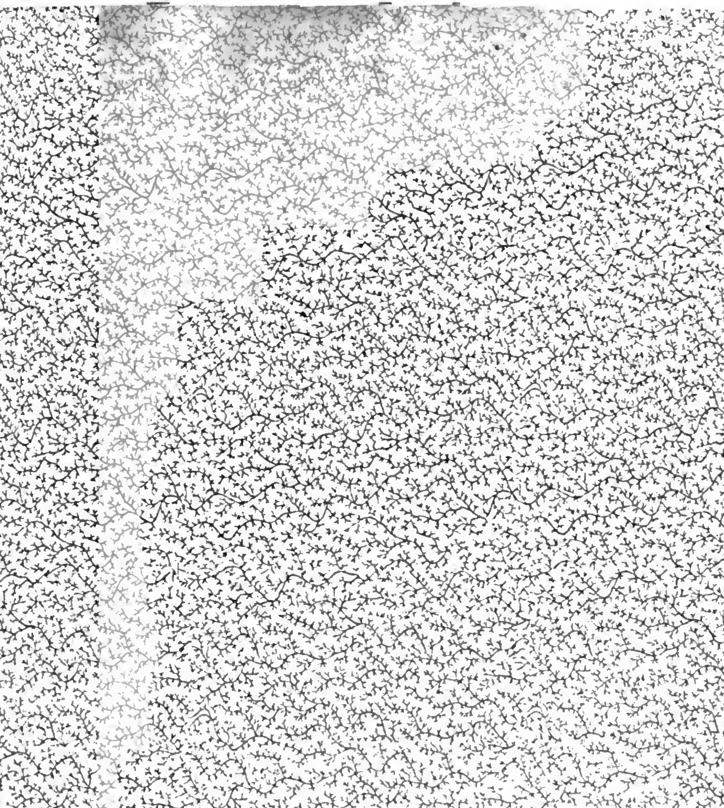
image
not
available





Die

Bücher des Apollonius von Perga

DE SECTIONE SPATII

wiederhergestellt

von

Dr. W. A. Diesterweg

ordentlichem Professor der Mathematik auf der königlich-preufsischen Rhein-Universität.

Mit fünf Steintafeln.

Elberfeld, 1827.

Büschlersche Verlags-Buchhandlung.

Vorwort.

Bey der, von den Neueren selten, oder nie erreichten, Vollkommenheit, in welcher die Schriften des Apollonius von Perga abgefafst sind, und welche ihm den Nahmen des grofsen Geometers erwarb; bey der Vollendung, welche er insbesondere seiner Schrift de sectione rationis zu geben vermogte, konnte es von den Freunden der ächten Geometrie nur schmerzlich empfunden werden, dafs die, dieser Schrift parallel laufende, Schrift: de sectione spatii in dem Laufe der Zeiten verlohren gegangen war. Dasjenige, was Pappus in sei-

nen collectionibus mathematicis anführt, bezeichnet den Inhalt derselben mit hinlänglicher Genauigkeit, und die Hülfssätze, welche er als solche, deren sich Apollonius bey Auflösung der Aufgaben bedient habe, aufbewahrt hat, lassen ungefähr die Art ihrer Abfassung erkennen.

Der berühmte Edmund Halley, Professor in Oxford, fügte seiner, im Jahre 1706 erschienenen, Uebersetzung der Schrift de sectione rationis aus dem Arabischen ins Lateinische einen Anhang bey, betitelt: Apollonii Pergaei de sectione spatii libri restituti.

Derselbe ist aber keine Wiederherstellung der Schrift des Apollonius, weil er auf 20 Octavseiten nur einige Fälle der von Apollonius vollständig behandelten Aufgabe entwickelt.

Von der hohen Vortrefflichkeit der auf uns gekommenen Schriften des Apollonius,

und von dem glücklichen Einflusse, welchen das Studium der geometrisch - analytischen Schriften desselben auf die Bildung des mathematischen Sinnes junger Mathematiker hat, lebendig überzeugt; die Meinung des Apollonius theilend, daſs das Studium einer, in allen ihren Theilen vollständig behandelten, geometrischen Aufgabe einen groſsen Werth für den jungen Mathematiker habe; und der Hoffnung mich hingebend, auf die Wichtigkeit des Studiums der Alten aufmerksam zu machen, welches in dieser Zeit besonders Noth zu thun scheint; versuche ich in der vorliegenden Schrift eine vollständige Wiederherstellung der Schrift des Apollonius de sectione spatii, von welcher ich nichts mehr wünsche, als daſs man sie in dem Geiste des Apollonius abgefast finden möge. Sie ist in derselbigen systematischen Ordnung verfaſst, welche ich bey meiner Bearbeitung der Schrift de sectione rationis befolgte,

und nach welcher dasjenige, was b y Ap
lonius unter Lib. II. Loc. X. aufgefü
erst nach Loc. XIV. seine Stelle finden

W. A. Diesterweg.

Die

Bücher des Apollonius von Perga

DE SECTIONE SPATII.

Aufgabe.

Von einem, in einer gegebenen Ebene, gegebenen Punkte aus, durch zwey, aufserhalb desselben, in dieser Ebene gegebene gerade Linien, eine gerade Linie so zu ziehen, dafs das Rechteck aus den, zwischen den Durchschnittspunkten mit jenen Linien und zweyen in denselben gegebenen Punkten enthaltenen, Segmenten von gegebener Gröfse sey.



Erstes Buch.

Von einem, in einer gegebenen Ebene, gegebenen Punkte aus, durch zwey, aufserhalb desselben, in dieser Ebene gegebene gerade Linien, eine gerade Linie so zu ziehen, dafs das Rechteck aus den, zwischen den Durchschnittspunkten mit jenen Linien, und zweyen in denselben gegebenen Punkten, welche, wenn die Linien nicht parallel sind, nicht beide aufserhalb des Durchschnittspunktes derselben liegen, enthaltenen, Segmenten von gegebener Gröfse sey. (Fig. 1—24.).

I.) *Die gegebenen Linien AB, CD seyen parallel.* (Fig. 1—6.). *Die gegebenen Punkte seyen F, G, der gegebene Flächenraum sey* $=\alpha^2$.

1.) *Der aufserhalb der Linien gegebene Punkt O liege nicht zwischen denselben.* (Fig. 1—3.). (Loc. I.).

F a l l 1. (Fig. 1.)

Die Segmente sollen auf den Linien FD, GE liegen.

Analysis.

Es seyen FL, GX die gesuchten Segmente, so ist, wenn die, die Linie AB in E schneidende, gerade Linie OF gezogen wird,

$$FO : OE = FL : EX \quad \text{(Eucl. El. VI. 4.)}$$
$$= \left\{\begin{matrix} FL.\ GX \\ a^2 \end{matrix}\right\} : GX.\ XE \quad \text{(El. VI. 1.)}$$

also ist GX.XE (Euclids Data v. Wurm, Berl. 1825. Satz 2.) und da $\left\{\begin{matrix} GX - XE \\ GE \end{matrix}\right\}$ gegeben ist (Dat. 25. 26.), auch EX (Dat. 84.), somit X, (Dat. 27.), und die gerade Linie OX der Lage nach gegeben (Dat. 26.).

Construction.

Man ziehe die gerade Linie OF, welche die Linie AB in E schneide, beschreibe über OF einen Halbkreis, mache OEP = R, bezeichne den Durchschnitt der Linie EP und des Kreisumfanges mit P, ziehe EH $\#$ OP, mache EH = a, HKE = R = GEM = EGN, indem ME, GN auf verschiedenen Seiten von EG genommen werden, nehme ME = GN = EK, ziehe MN, welche einem, über EG als Durchmesser beschriebenen, Kreise in R begegne, mache NRX = R, und ziehe durch den Durchschnitt X der Linien RX, AB die, die Linie CD in L schneidende, gerade Linie OX, so sind FL, GX die gesuchten Segmente.

Beweis.

Die Linie RX schneidet die Linie EB in X so, dafs GX. XE = $\left\{\begin{matrix} ME.\ GN \\ EK^2 \end{matrix}\right\}$ (die Bücher des Apollonius de sect. rat. von Diesterweg. Berl. 1824. Lehns. B. pag. 4.)

$$\left.\begin{array}{rl} \text{also ist} & \left.\begin{matrix}\alpha^2\\ HE^2\end{matrix}\right\} : EK^2 \\ \text{(El. VI. 4. 22.)} & PO^2 : OE^2 \\ \text{(El. VI. 20. Zus. 2.)} & FO : OE \\ & FL : EX \\ & FL.GX : GX.XE \end{array}\right\} = \alpha^2 : GX.XE$$

folglich $FL.GX = \alpha^2$ (El. V. 9.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien CD, EB in Z, Y schneidende, gerade Linie OZ ist

$$FZ \gtrless FL,\ GY \gtrless GX$$

$$\text{also ist } FZ.GY \gtrless FL.GX$$

folglich bestimmen die dem Punkte G näher liegenden Punkte der Linie EB kleinere Rechtecke, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des über GE beschriebenen Kreisumfanges und der Linie MN ein, die Linie AG in X′ schneidendes, Perpendikel auf MN, so ist, wenn die, die Linie CD in L′ schneidende, gerade Linie OX′ gezogen wird,

$GX'.X'E = EK^2$ (s. die Bücher des Apollonius de sectione rat. pag. 5.)

$$\left.\begin{array}{rl} \text{also} & \alpha^2 : EK^2 \\ & FO : OE \\ & FL' : E'X' \\ & FL'.GX' : GX'.X'E. \end{array}\right\} = \alpha^2 : GX'.X'E$$

folglich $FL'.GX' = \alpha^2$.

mithin ist auch eine Linie OX′ gefunden, welche von den Linien FC′, GA Segmente abschneidet, deren Rechteck gegeben ist, welches Fall 3. ist.

Fall 2. (Fig. 2. 3.)

Die Segmente sollen auf den Linien FC, GB liegen.

Analysis.

Es seyen FL, GX die gesuchten Segmente, so ist, wenn die, die Linie AB in E schneidende, gerade Linie OF gezogen wird,

$$FO : OE = FL : EX \text{ (El. VI. 4.)}$$
$$= \left\{\begin{matrix} FL.\ GX \\ \alpha^2 \end{matrix}\right\} : GX.\ XE. \text{ (El. VI. 1.)}$$

also ist EX. XG (Data 2.), und da $\left\{\begin{matrix} GX + XE \\ GE \end{matrix}\right\}$ gegeben ist (Dat. 25. 26.), auch EX (Dat. 84.), somit X (Dat. 27.), und die gerade Linie OX der Lage nach gegeben (Dat. 26.).

Construction.

Man ziehe die gerade Linie OF, welche die Linie AB in E schneide, beschreibe über OF einen Halbkreis, mache OEP = R, bezeichne den Durchschnitt der Linie EP und des Kreisumfanges mit P, ziehe EH ⋕ OP, mache EH = α, HKE = R = GEM = EGN, indem ME, GN auf verschiedenen Seiten von EG genommen werden, nehme ME = GN = EK, ziehe MN, welche einem über EG als Durchmesser beschriebenen Kreisumfange in R begegne, mache NRX = R, und ziehe durch den Durchschnitt X der Linien RX, AB die, die Linie CD

in L schneidende, gerade Linie OX, so sind FL, GX die gesuchten Segmente.

Determination.

Damit der über EG beschriebene Kreis die Linie MN erreiche, muss seyn

$$\left.\begin{array}{r} EM.\,GN. \\ EM^2 \\ EK^2 \end{array}\right\} \overset{=}{<} \tfrac{1}{4}\,GE^2$$ (Apoll. de sect. rat. Lehns. A. Det. pag. 1.)

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} HE^2 : EK^2 \\ PO^2 : OE^2 \\ FO\ : OE \end{array}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{array}{c} HE^2 \\ \alpha^2 \end{array}\right\} : \tfrac{1}{4}\,GE^2$$ (El. V. 7. 8.)

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{array}{r} FO : OE \\ HE^2 : EK^2 \end{array}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{array}{c} \alpha^2 \\ HE^2 \end{array}\right\} : \tfrac{1}{4}\,GE^2$$ (Det.)

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} EK^2 \\ EM^2 \end{array}\right\} \overset{=}{<} \tfrac{1}{4}\,GE^2$$

folglich berührt (Fig. 2.), oder schneidet (Fig. 3.) der Kreis die Linie MN.

$$\text{Ferner ist } GX.\,XE = \left\{\begin{array}{l} ME.\,GN. \\ EK^2 \end{array}\right.$$ (Apoll. de rect. rat. Lehns. A. Bew. pag. 2.)

$$\text{also ist } \left.\begin{array}{r} \alpha^2 \\ NE^2 \end{array}\right\} : EK^2 \left.\begin{array}{l} \\ \\ PO^2 : OE^2 \\ FO\ : OE \\ FL\ : EX \\ FL.\,GX : GX.\,XE \end{array}\right\} = \alpha^2 : GX.\,XE$$

folglich $FL.\,GX = \alpha^2$.

Zus. 1.

Für eine andere, in Fig. 2. die Linien CD, GE in Z, Y schneidende, gerade Linie OZ ist

$$\left.\begin{array}{r} FO : OE \\ FL.GX : GX.XE \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} FZ : EY \\ FZ.GY : GY.YE \text{ (El. VI. 1.)} \end{array}\right.$$

Es ist aber $GX = XE$ (El. III. 19.)

also $GX.XE > GY.YE$ (El. II. 5.)

folglich $FL.GX > FZ.GY$ (El. V. 14.)

mithin bestimmt der Halbirungspunkt von EG ein grösseres Rechteck, als jeder andere Punkt der Linie EG.

Für eine dritte, die Linien CD, EG in T,V schneidende, gerade Linie OT ist

$$\left.\begin{array}{r} FO : OE \\ FZ : EY \\ FZ.GY : GZ.YE \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} FT : EV \\ FT.GV : GV.VE \end{array}\right.$$

Ist nun $VX \gtrless XY$

so ist $GY.YE \gtrless GV.VE$ (El. II. 5.)

also auch $FZ.GY \gtrless FT.GV$

mithin bestimmen die, dem Halbirungspunkte von EG näher liegenden, Punkte der Linie EG grössere Rechtecke, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man, in Fig. 3., in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf MN, so bestimmt der dadurch gegebene Punkt X′ zwey andere Segmente auf denselben Linien mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet.

Fall 3. (Fig. 1.)

Die Segmente sollen auf den Linien FC, GA liegen.

Anal. Contsr. Bew.

Buchstäblich, wie zu Fall 1., wenn R′, X′, L′, statt R, X, L, und EX′—X′G statt GX—XE gesetzt wird.

Zus. 1.

Buchstäblich, wie zu Fall 1., wenn L′, Y′, Z′, CD, GA statt L, Y, Z, FD, EB gesetzt wird.

Zus. 2.

Der zweite Durchschnitt R bestimmt Segmente nach Fall 1., wie leicht erhellet.

2.) *Der ausserhalb der Linien gegebene Punkt O liege zwischen denselben.* (Fig. 4-6.) (Loc. II.).

Fall 1. (Fig. 4. 5.)

Die Segmente sollen auf den Linien FD, GB liegen.

Analysis.

Buchstäblich, wie zu Loc. I. Fall 2.

Construction.

Man ziehe die, die Linie AB in E schneidende gerade Linie OF, beschreibe über EF einen Halbkreis, mache EOP = R = OEH = GEM = EGN, indem ME, GN auf einerley Seite von GE genommen werden, nehme EH = α, HK ⧺ PE, ME = EK = GN, ziehe MN, welche einem über GE beschriebenen Halbkreise in R begegne, mache MRX = R, und ziehe durch den Durchschnitt X der Linien RX, AB die, die Linie CD in L schneidende, gerade Linie OX, so sind FL, GX die gesuchten Segmente.

Determination

Buchstäblich, wie zu Loc. I. Fall 2.

Beweis.

Buchstäblich, wie zu Loc. I. Fall 2. in Beziehung auf Fig. 4. 5.

Zus. 1. (Fig. 4.)

Buchstäblich, wie Loc. I. Fall 2. Zus. 1.

Zus. 2. (Fig. 5.)

Buchstäblich, wie Loc. I. Fall 2. Zus. 2.

Fall 2. (Fig. 6.)

Die Segmente sollen auf den Linien FC, GB liegen.

Analysis.

Buchstäblich, wie zu Loc. I. Fall 1.

Construction.

Man ziehe die, die Linie AB in E schneidende, gerade Linie OF, beschreibe über EF einen Halbkreis, mache EOP = R = OEH = GEM = EGN, indem ME, GN auf verschiedenen Seiten von GE genommen werden, nehme EH = α, HK ⧣ PE, ME = EK = GN, ziehe MN, welche dem Umfange eines über GE beschriebenen Halbkreises in R begegne, mache MRX = R, und ziehe durch den Durchschnitt X der Linien RX, AB die, die Linie CD in L schneidende, gerade Linie OX, so sind FL, GX die gesuchten Segmente.

Beweis.

Buchstäblich, wie zu Loc. I. Fall 1.

Zus. 1. 2.

Buchstäblich, wie Loc. I. Fall 1. Zus. 1. 2., wenn FC statt FD, und FD statt FC gesetzt wird.

F a l l 3. (Fig. 6.)

Die Segmente sollen auf den Linien FD, GA liegen.

A n a l y s i s.

Buchstäblich, wie zu Loc. I. Fall 3.

C o n s t r u c t i o n.

Man ziehe die gerade Linie OF, welche die Linie AB in E schneide, beschreibe über EF einen Halbkreis, mache EOP = R = OEH = GEM = EGN, indem ME, GN auf verschiedenen Seiten von EG genommen werden, nehme EH = α, HK ⧺ PE, ME = GN = EK, ziehe MN, welche dem Umfange eines über EG als Durchmesser beschriebenen Kreises in R′ begegne, mache MR′X′ = R, und ziehe durch den Durchschnitt X′ der Linien R′X′, AB die, die Linie CD in L′ schneidende, gerade Linie OX′, so sind FL′, GX′ die gesuchten Segmente.

B e w e i s.

Buchstäblich, wie zu Loc. I. Fall. 3.

Z u s. 1. 2.

Buchstäblich, wie Loc. I. Fall 3. Zus. 1. 2.

II.) *Die gegebenen Linien seyen nicht parallel.* (Fig. 7—24.).

1.) *Die in beiden Linien gegebenen Punkte liegen im Durchschnittspunkte F.* (Fig. 7—9.). (Loc. III.).

F a l l 1. (Fig. 7.)

Die Segmente sollen auf den Linien CF, FA liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FL, FX die gesuchten Segmente. Es sey auch OH ⧺ AB, und FE so bestimmt, daſs

$$\underline{OH.\,FE = a^2}$$

$$\text{so ist } OH.\,FE = LF.\,FX$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} OH : FX \\ (\text{El. VI. 4.})\ HL : LF \end{array}\right\} = LF : FE \ (\text{El. VI. 16.})$$

$$\text{folglich } HF : FL = LE : EF$$

$$\text{mithin } FL.\,LE = HF.\,FE \ (\text{El. VI. 16.})$$

Demnach ist FL. LE, und da FE gegeben ist, FL (Dat. 84.), somit L und die Lage der geraden Linie OL gegeben.

C o n s t r u c t i o n.

Man ziehe OH ‡ AB, OK ‡ CD, mache PF = FQ = a, PE ‡ KQ, EFN = R = FEM, ME = EF, NF = FH, beschreibe über EF als Durchmesser einen Kreis, welcher der geraden Linie MN in R begegne, und errichte in R auf RM ein, die Linie CD in L schneidendes, Perpendikel. Zieht man die, die Linie AB in X schneidende, gerade Linie OL, so sind LF, FX die gesuchten Segmente.

B e w e i s.

$$\text{Es ist } FL.\,LE = EM.\,FN$$
$$= EF.\,FH$$

$$\text{also } HF : FL = LE : EF$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{r} HL : LF \\ OH : FX \end{array}\right\} = LF : FE$$

$$\text{mithin } LF.\,FX = \left\{\begin{array}{c} OH.\,FE \\ KF.\,FE \\ a^2 \end{array}\right\} (\text{El. VI. 17.})$$

Z u s. 1.

Für eine andere, die Linien CF, FA in Z, Y schneidende, gerade Linie FZ ist

$$FZ \gtrless FL, \quad FY \gtrless FX$$

also $ZF.FY \gtrless LF.FX$

folglich bestimmen die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie FC kleinere Rechtecke, als die entfernteren.

Z u s. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ jenes Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf MN, so ist, wenn L′ der Durchschnitt desselben mit FD ist, $FL'.L'E = EM.FN$
$= EF.FH$

also $HF : FL' = L'E : EF$

Da $L'E > EF$

so ist $HF > FL'$

folglich liegt L′ zwischen F,H.

Ferner ist $\left.\begin{array}{l} HL' : L'F \\ OH : FX' \end{array}\right\} L'F : FE$ wenn X′ der Durchschnitt der geraden Linie OL′ mit FB ist.

mithin $L'F.FX' = OH.FE$
$= \alpha^2$

demnach ist auch eine Linie OX′ gefunden, welche von den Linien FB, CD Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 2. ist.

F a l l 2. (Fig. 7.)

Die Segmente sollen auf den Linien DF, FB liegen.

Analysis.

Es seyen FL′, FX′ die gesuchten Segmente. Es sey auch OH ⧣ AB, und FE so bestimmt, daſs

$$OH.\,FE = \alpha^2$$

so ist $OH.\,FE = L'F.\,FX'$

also $OH : FX' \Big\} = L'F : FE$ (El. VI. 16.)

(El. VI. 4.) $HL' : L'F \Big\}$

folglich $HF : FL' = L'E : EF$

mithin $FL'.\,L'E = HF.\,FE$ (El. VI. 16.)

demnach ist FL′. L′E, und da FE gegeben ist, FL′ (Dat. 84.), somit L′, und die Lage der geraden Linie OL′ gegeben.

Construction.

Man ziehe OH ⧣ AB, OK ⧣ CD, mache PF = FQ = α, PE ⧣ KQ, EFN = R = FEM, ME = EF NF = FH, beschreibe über EF als Durchmesser einen Kreis, welcher der geraden Linie MN in R′ begegne, und errichte in R′ auf R′M ein, die Linie CD in L′ schneidendes, Perpendikel. Zieht man die, die Linie AB in X′ schneidende, gerade Linie OL′, so sind L′F, FX′ die gesuchten Segmente.

Beweis.

Es ist $FL'.\,L'E = EM.\,FN$

also $L'F.\,FX' = \alpha^2$; buchst., wie Fall 1. Zus. 2.

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien DF, FB in Z′, Y′ schneidende, gerade Linie FZ′ ist

$$FZ' \gtrless FL',\ FY' \gtrless FX'$$

also $Z'F.\,FY' \gtrless L'F.\,FX'$

folglich bestimmen die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie DF kleinere Rechtecke, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein, die Linie CD in L schneidendes, Perpendikel auf MN, so ist, wenn OL die Linie AB in X schneidet, FL. LE = EM. FN

also LF. FX = α^2, wie Fall 1. Bew.

Es ist mithin auch eine gerade Linie OL gefunden, welche von den Linien CF, FA Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 3. (Fig. 8. 9.)

Die Segmente sollen auf den Linien DF, FA liegen.

Analysis.

Es seyen FL, FX die gesuchten Segmente. Es sey auch OH ⋕ AB, und FE so bestimmt, daſs OH. FE = α^2, so ist OH. FE = LF. FX

also OH : FX } = LF : FE (El. VI. 16.)
(El. VI. 4.) HL : LF }

folglich HF : FL = LE : EF

mithin FL. LE = HF. FE (El. VI. 16.)

Demnach ist FL. LE, und da FE gegeben ist, FL, (Dat. 85.) somit L und die Lage der geraden Linie OL gegeben.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Determination.

Damit der über EF beschriebene Kreis der Linie MN begegne, mufs seyn $\left.\begin{array}{r}FN.EM\\ HF.FE\end{array}\right\} \overset{=}{<} \frac{1}{4}FE^2$

$$\text{also } HF \overset{=}{<} \frac{1}{4}FE$$

$$\text{folglich } OH.HF \overset{=}{<} \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}OH.FE\\ \frac{1}{4}\alpha^2\end{array}\right.$$

$$\text{mithin } 4OH.HF \overset{=}{<} \alpha^2.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } 4OH.HF \overset{=}{<} \alpha^2$$

$$\text{also } OH.HF \overset{=}{<} \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}\alpha^2\\ \frac{1}{4}OH.FE\end{array}\right.$$

$$\text{folglich } HF \overset{=}{<} \frac{1}{4}FE$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{r}HF.FE\\ FN.EM\end{array}\right\} \overset{=}{<} \frac{1}{4}FE^2$$

demnach berührt (Fig. 8.), oder schneidet (Fig. 9.) der Kreis die Linie MN.

$$\text{Ferner ist } FL.LE = HF.FE$$

$$\text{also } LF.FX = \alpha^2$$

buchst. wie zu Fall 1. Bew.

Zus. 1. (Fig. 8.)

Für eine andere, die Linien EF, FA in Z, Y schneidende, gerade Linie OZ ist

$$FZ.ZE < \left\{ \begin{matrix} FL.LE \\ HF.FE \end{matrix} \right. \text{(El. III. 19. II. 5.)}$$

also $HF:FZ > ZE:EF$ (Propos. de ration. inter se divers. dem. ed. Hauber. Tub. 1793. §. 53.)

$$\text{folglich } \left. \begin{matrix} \left. \begin{matrix} FZ\text{-}FH \\ HZ \end{matrix} \right\} : FZ \\ OH : FY \end{matrix} \right\} < \left\{ \begin{matrix} FE\text{-}EZ \\ FZ \end{matrix} \right\} : EF \text{ (Hauber. §. 28.)}$$

$$\text{mithin } \left. \begin{matrix} OH.FE \\ EF.FX \end{matrix} \right\} < ZF.FY \text{ (Hauber. §. 28.)}$$

Demnach bestimmt der Halbirungspunkt der Linie FE, für welchen $FL = 2FA$, ein kleineres Rechteck, als jeder andere Punkt der Linie HE.

Ferner sey Ot eine, die Linien DF, FA in t, V schneidende, gerade Linie, und $tL > LZ$,

$$\text{so ist } KY.HZ = KO.OH \text{ (El. VI. 16.)}$$
$$= KV.Ht$$

$$\text{also } VK:KY = HZ:Ht$$

$$\text{folglich } VY:KY = tZ:Ht$$

$$\text{Da } tK \gtrless KZ$$

$$\text{so ist } \left. \begin{matrix} Zt:tH \\ VY:YK \end{matrix} \right\} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} Zt:HZ$$

$$\text{mithin } VY:tZ \gtrless YK:HZ$$

$$\text{Da } \left. \begin{matrix} LH \\ FH \\ OK \end{matrix} \right\} \gtrless HZ$$

$$\text{so ist } \begin{matrix} OK : HZ \\ KY : OK \end{matrix} \Big\} \gtrless HZ : \Big\{ \begin{matrix} OK \\ FH \end{matrix}$$

$$\text{somit } KY : HZ \gtrless \Big\{ \begin{matrix} OH \\ FK \end{matrix} \Big\} : FH$$

$$\text{demnach } VY : tZ \gtrless FK : FH$$

$$\text{also } FH.\,VY \gtrless FK.\,tZ$$

$$\text{also für das ob. Zeichen } FH.KV - FH.KY > FK.HZ - FK.Ht$$

$$\text{folglich } \left\{ \underbrace{\Big\{ \begin{matrix} FH.\,FK + FH.\,KV \\ FH.\,FV \end{matrix} \Big\} + \Big\{ \begin{matrix} FK.\,Ht + KV.\,Ht \\ FV.\,Ht \end{matrix} \Big\}}_{Ft.\,FV} \right\}$$

$$> \left\{ \underbrace{\Big\{ \begin{matrix} FH.\,FK + FH.\,KY \\ FH.\,FY \end{matrix} \Big\} + \Big\{ \begin{matrix} FK.\,HZ + KY.\,HZ \\ FY.\,HZ \end{matrix} \Big\}}_{FZ.\,FY} \right\}$$

$$\text{Für das untere Zeichen } FH.\,KY - FH.KV < FK.\,tH - FK.\,HZ$$

$$\text{folglich } \left\{ \underbrace{\Big\{ \begin{matrix} FH.\,FK + FH.\,KY \\ FH.FY \end{matrix} \Big\} + \Big\{ \begin{matrix} FK.\,HZ + KY.\,HZ \\ FY.\,HZ \end{matrix} \Big\}}_{FK.\,FY} \right\}$$

$$< \left\{ \underbrace{\Big\{ \begin{matrix} FH.\,FK + FH.\,KV \\ FH.\,FV \end{matrix} \Big\} + \Big\{ \begin{matrix} FK\,Ht + KV.\,Ht \\ FV.\,Ht \end{matrix} \Big\}}_{Ft.\,FV} \right\}$$

mithin bestimmen die dem Halbirungspunkte von FE näher liegenden Punkte kleinere Rechtecke, als die entfernteren.

Z u s. 2. (Fig. 9.)

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ jenes Kreises mit der Linie MN ein Perpendikel auf MN, so bestimmt dasselbe zwey Segmente auf den Li-

nien DF, FA mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet.

2.) *Der auf der Linie AB gegebene Punkt liegt in dem Durchschnittspunkte F, der auf der Linie CD gegebene*, G,

A.) *auf der Linie FC.* (Fig. 10-14.). (Loc. IV.)

F a l l 1. (Fig. 10.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GC liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen GL, FX die gesuchten Segmente. Es sey auch OH ⧣ AB, und GE so bestimmt, dass OH. GE $= \alpha^2$, so ist OH. GE = FX. GL

also OH : FX } = LG : GE
HL : LF }

folglich HF : FL = LE : EG

mithin FL. LE = HF. EG

demnach ist FL. LE, und da FE gegeben ist, auch FL (Dat. 84.), somit L, und die Lage der geraden Linie OL gegeben.

C o n s t r u c t i o n.

Man ziehe OH ⧣ QG ⧣ AB, OK ⧣ CD, mache QG = GT = α, QE ⧣ PT, EFN = R = FEM, ME = EG, NF = FH, beschreibe über EF als Durchmesser einen Kreis, welcher der geraden Linie MN in R begegne, und errichte in R auf MN ein, die Linie CD in L schneidendes, Perpendikel. Zieht man

die, die Linie AB in X schneidende, gerade Linie OL, so sind FX, GL die gesuchten Segmente.

B e w e i s.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } FL.LE &= EM.FN \\ &= EG.FH \\ \hline \text{also } HF:FL &= LE:EG \\ \hline \text{folglich } \left.\begin{matrix} HL:LF \\ OH:FX \end{matrix}\right\} &= LG:GE \\ \hline \text{mithin } FX.GL &= OH.GE \\ &= PG.GE \\ &= QG.GP \\ &= a^2. \end{aligned}$$

Z u s. 1.

Für eine andere, die Linien GC, FA in Z, Y schneidende, gerade Linie *OZ* ist

$$GZ \gtrless GL, \quad FY \gtrless FX$$

$$\text{also } GZ.FX \gtrless GL.FX$$

mithin bestimmen die dem Punkte G näher liegenden Punkte der Linie GC kleinere Rechtecke, als die entfernteren.

Z u s. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf MN, so ist, wenn die, den Durchschnitt L′ des Perpendikels mit der Linie FD verbindende, die Linie FB in X′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird,

$$FL'.L'E = EG.FH$$

$$\text{also } HF : FL' = L'E : EG$$

$$\text{Da } L'E > EG$$

$$\text{so ist } HF > FL'$$

mithin liegt L' zwischen F,H.

$$\text{Auch ist } \left.\begin{matrix} HL' : L'F \\ OH : FX' \end{matrix}\right\} = L'G : GE$$

$$\text{folglich } GL'.FX' = OH.GE = \alpha^2$$

demnach ist eine Linie OL' gefunden, welche von den Linien CD, FB Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 3. ist.

Fall 2. (Fig. 11. 12.)

Die Segmente sollen auf den Linien AB, GF liegen.

Analysis.

Es seyen GL, FX die gesuchten Segmente. Es sey auch OH ⌗ AB, und GE so bestimmt, dafs

$$OH.\ GE = \alpha^2$$

$$\text{so ist } OH.\ GE = FX.\ GL$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} OH : FX \\ HL : LF \end{matrix}\right\} = LG : GE$$

$$\text{folglich } HF : FL = LE : EG$$

$$\text{mithin } FL.LE = HF.EG$$

demnach ist FL.LE, und da FE gegeben ist, FL (Dat. 85.), somit L, und die Lage der geraden Linie OL gegeben.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Determination.

Damit der Kreis der Linie MN begegne, muſs seyn

$$\left.\begin{matrix} ME.FN \\ EG.FH \end{matrix}\right\} \leqq \tfrac{1}{4} FE^2$$

$$\text{also } 4EG.FH \leqq \left\{\begin{matrix} (FG-GE)^2 \\ FG^2-2FG.GE+EG^2 \end{matrix}\right.$$

folglich

$$(FG+2EF)^2 \leqq FG^2-2EG(GF+2FH)+EG^2+(FG+2HF)^2$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} 4FG.HF+4HF^2 \\ 4FH.HG \end{matrix}\right\} \leqq \left\{\begin{matrix} (FG+2FH-EG)^2 \\ (GH+HF-EG)^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } EG \leqq GH+HF-2\sqrt{GH.HF}$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix} EG.OH \\ \alpha^2 \end{matrix}\right\} \leqq OH(GH+HF-2\sqrt{GH.HF})$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \alpha^2 \leqq OH(GH+HF-2\sqrt{GH.HF}) \text{(Det.)}$$

$$\text{also } ME.FN \leqq \tfrac{1}{4} FE^2$$

wie aus der Determination leicht hervorgehet, mithin berührt (Fig. 11.), oder schneidet (Fig. 12.) der Kreis die Linie MN.

Auch ist $FL.LE = EM.FN$

folglich $FX.GL = \alpha^2$ (buchst. wie Fall 1. Bew.)

Zus. 1. (Fig. 11.)

Für eine andere, die Linien AB, FE in Y, Z schneidende, gerade Linie OZ ist

$$FZ.ZE < \left\{\begin{array}{l} FL.LE \text{ (El. II. 5.)} \\ HF.GE \end{array}\right.$$

$$\text{also } HF:FZ > ZE:EG$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{r} HZ:ZF \\ OH:FY \end{array}\right\} > ZG:GE$$

$$\text{mithin } FY.GZ < \left\{\begin{array}{l} OH.GE \\ \quad \alpha^2 \\ FX.GL \end{array}\right.$$

demnach bestimmt der Halbirungspunkt L von FE, für welchen $HL = \sqrt{GH.HF}$, ein gröſseres Rechteck, als jeder andere Punkt der Linie FE.

Ferner sey Ot eine, die Linien EF, AB in t, V schneidende, gerade Linie, auch $tL > LZ$, so ist

$$\begin{aligned} KY.HZ &= KO.OH \text{ (El. VI. 16.)} \\ &= KV.Ht \end{aligned}$$

$$\text{also } VK:KY = ZH:Ht$$

$$\text{folglich } VY:YK = Zt:tH$$

$$\text{Da } tH \lessgtr HZ$$

$$\text{so ist } \left.\begin{array}{r} Zt:tH \\ VY:YK \end{array}\right\} \gtrless tZ:ZH$$

$$\text{folglich } VY:tZ \gtrless KY:HZ$$

$$\text{Da } LH \gtrless HZ$$

$$\text{so ist } \left.\begin{array}{r} LH^2 \\ GH.HF \end{array}\right\} \gtrless HZ^2$$

mithin $\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}FH\\OK\end{matrix}\right\}:HZ\\ KY:OH\end{matrix}\right\}\gtrless ZH:HG$

demnach $KY:HZ \gtrless \left\{\begin{matrix}OH\\FK\end{matrix}\right\}:HG$

also $VY:tZ \gtrless FK:HG$

folglich $VY.HG \gtrless FK.tZ$

mithin für das obere Zeichen

$$HG.VK - HG.KY > FK.HZ - FK.Ht$$

somit

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}FK.GH-FK.HZ\\FK.GZ\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}(HG.KY-KY.HZ)\\KY.GZ\end{matrix}\right.\\FY.GZ\end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix}\left.\begin{matrix}FK.GH-VK.GH\\FV.GH\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}(FK.Ht-KV.Ht)\\FV.Ht\end{matrix}\right.\\FV.Gt\end{matrix}\right.$$

Für das untere Zeichen ist

$$HG.KY - HG.VK < FK.Ht - FK.HZ$$

somit

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}FK.GH-VK.GH\\FV.GH\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}(FK.Ht-KV.Ht)\\FV.Ht\end{matrix}\right.\\FV.Gt\end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix}\left.\begin{matrix}FK.GH-FK.HZ\\FK.GZ\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}(HG.KY-KY.HZ)\\GZ.KY\end{matrix}\right.\\FY.GZ\end{matrix}\right.$$

also bestimmen die dem Punkte L auf einerley Seite näher liegenden Punkte der Linie FE gröſsere Rechtecke, als die entfernteren. Uebrigens kann von zwey

auf verschiedenen Seiten des Punktes L liegenden Punkten der dem Punkte L näher liegende ein kleineres Rechteck bestimmen, als der entferntere. conf. Apoll. de sect. det. L. I. pr. 2. Ep. 2. a.

Z u s. 2. (Fig. 12.)

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf MN, so bestimmt dasselbe zwey andere Segmente auf den Linien FA, GF mit der gegebenen Eigenschaft, in gleichen Entfernungen von dem Halbirungspunkte der Linie EF, wie leicht erhellet.

F a l l 3. (Fig. 10.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, CD liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen GL′, FX′ die gesuchten Segmente. Es sey auch OH ♯ AB, und GE so bestimmt, dafs

$$\overline{OH.GE = \alpha^2}$$

$$\text{so ist } \overline{OH.GE = FX'.GL'}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} OH:FX' \\ HL':L'F \end{matrix}\right\} = L'G:GE$$

$$\text{folglich } \overline{HF.FL' = L'E:EG}$$

$$\text{mithin } FL'.L'E = HF.EG$$

Demnach ist FL′. L′E, und da FE gegeben ist, FL′ (Dat. 84.), somit L′ und die Lage der geraden Linie OL′ gegeben.

C o n s t r u c t i o n.

Man ziehe OH ♯ QG ♯ AB, OK ♯ CD, mache QG = GP = α, QE ♯ PT, EFN = R = FEM, ME = EG,

NF = FH, beschreibe über EF als Durchmesser einen Kreis, welcher der geraden Linie MN in R′ begegne, und errichte in R′ auf MN ein, die Linie CD in L′ schneidendes, Perpendikel. Zieht man die, die Linie AB in X′ schneidende, gerade Linie OL′, so sind FX′, GL′ die gesuchten Segmente.

Beweis.

Es ist $\underline{FL'.\,L'E = EG.\,FH}$

also $FX'.\,GL' = \alpha^2$; (buchst., wie Fall 1. Zus. 2.)

Zus. 1.

Es erhellet leicht, wie Fall 1. Zus. 1., dafs die dem Punkte F näher liegenden Punkte, wie Z′, der Linie FH kleinere Rechtecke bestimmen, als die entfernteren.

Zus. 2.

Der zweite Durchschnitt K des Kreises und der Linie MN bestimmt Segmente nach Fall 1., auf den Linien FA, GC, mit der gegebenen Eigenschaft, wie leicht erhellet.

Fall 4. (Fig. 13. 14.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

Analysis.

Buchstäblich, wie zu Fall 2.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Determination.

Damit der Kreis der Linie MN begegne, mufs seyn

$$\left.\begin{array}{l} ME.\,FN \\ EG.\,FH \end{array}\right\} \leqq \tfrac{1}{4}FE^2$$

$$\text{also } 4EG.\,FH \leqq \left\{\begin{array}{l} (EG-GF)^2 \\ EG^2-2EG.\,GF+FG^2 \end{array}\right.$$

folglich

$$(FG+2HF)^2 \leqq EG^2\text{-}2EG(FG+2HF)+FG^2+(FG+2HF)^2$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{r} 4GF.FH+4HF^2 \\ 4FH.\,HG \end{array}\right\} \leqq \left\{\begin{array}{l} (EG-(FG+2HF)^2 \\ (EG-(GH+HF)^2 \end{array}\right.$$

$$\text{somit } GH+HF+2\sqrt{GH.\,HF} \leqq EG$$

$$\text{demnach } OH(GH+HF+2\sqrt{GH.\,HF}) \leqq \left\{\begin{array}{l} EG.\,OH \\ \alpha^2 \end{array}\right.$$

B e w e i s.

$$\text{Es ist } OH\ (GH+HF+2\sqrt{GH.\,HF}) \leqq \alpha^2$$

$$\text{also } ME.\,FN \leqq \tfrac{1}{4}FE^2$$

wie aus der Determination leicht hervorgehet, mithin berührt (Fig. 13.), oder schneidet (Fig. 14.) der Kreis die Linie MN.

$$\text{Auch ist } FL.\,LE = EM.\,FN$$

$$\text{also } FX.\,GL = \alpha^2 \text{ (buchst. wie Fall 1. Bew.)}$$

Z u s. 1. (Fig. 13.)

Für eine andere, die Linien AB, HE in Y, Z schneidende, gerade Linie OZ ist

$$FZ.\,ZE < \left\{\begin{array}{l} FL.\,LE \\ HF.\,GE \end{array}\right.$$

$$\text{also } HF:FZ > ZE:EG$$

$$\text{folglich}\ \left.\begin{array}{c}HZ:ZF\\OH:FY\end{array}\right\} < ZG:GE$$

$$\text{mithin}\ FY.GZ > \left\{\begin{array}{c}OH.GE\\ \alpha^2\\ FX.GL\end{array}\right.$$

demnach bestimmt der Punkt L, für welchen $HL = \sqrt{FH.HG}$, ein kleineres Rechteck, als jeder andere Punkt der Linie HE.

Ferner sey Ot eine, die Linien AB, HE in V, t schneidende, gerade Linie, auch $tL > LZ$,

so ist $KY.HZ = KV.Ht$

also $VY.HG \gtrless FK.tZ$

mithin für das obere Zeichen

$$GH.VK - HG.KY > FK.HZ - FK.Ht$$

$$\text{somit}\ \left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}FK.GH+GH.VK\\FV.GH\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}FK.Ht+KV.Ht\\FV.Ht\end{array}\right.\\ FV.Gt\end{array}\right\}$$

$$> \left\{\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}FK.GH+FK.HZ\\FK.GZ\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}HG.KY+HZ.KY\\GZ.KY\end{array}\right.\\ FY.GZ\end{array}\right.$$

Für das untere Zeichen ist

$$HG.KY - HG.KV < FK.Ht - FK.HZ$$

$$\text{somit}\ \left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}FK.GH+FK.HZ\\FK.GZ\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}HG.KY+HZ.KY\\GZ.KY\end{array}\right.\\ FY.GZ\end{array}\right\}$$

$$< \left\{\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}FK.GH+HG.KV\\FV.GH\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}FK.Ht+KV.Ht\\FV.Ht\end{array}\right.\\ FV.Gt\end{array}\right.$$

mithin bestimmen die dem Punkte L auf einerley Seite näher liegenden Punkte der Linie HE kleinere Rechtecke, als die entfernteren. Uebrigens kann von zwey auf verschiedenen Seiten des Punktes L liegenden Punkten der näher liegende ein gröſseres Rechteck bestimmen, als der entferntere.

Z u s. 2. (Fig. 14.)

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf MN, so bestimmt dasselbe zwey andere Segmente auf den Linien FA, GD mit der gegebenen Eigenschaft, in gleichen Entfernungen von dem Halbirungspunkte von FE, wie leicht erhellet.

B.) *auf der Linie FD.* (Fig. 15.-24.). *Es liege, wenn H den Durchschnitt der mit AB parallel gezogenen geraden Linie OH mit CD bezeichnet, der Punkt G*

a.) *in H.* (Fig, 15-17.). (Loc. V.)

F a l l 1. (Fig. 15.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente, so ist

$$OG:GL = XF:FL$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}FX.\,GL\\ \alpha^2\end{matrix}\right\} = OG.\,FL$$

$$\text{folglich } OG:\alpha = \alpha:FL$$

mithin ist FL, somit L, und die Lage der geraden Linie OL gegeben.

Construction.

Man mache $OK \# CD$, $PF = FQ = \alpha$, $PL \# KO$, und ziehe die, die Linie AB in X schneidende, gerade Linie OL, so sind FX, GL die gesuchten Segmente.

Determination.

Damit LF gröſser, als FG werde, muſs seyn

$$\left.\begin{matrix}\alpha:LF\\ OH:\alpha\end{matrix}\right\} < \alpha:FG$$

folglich $\left.\begin{matrix}OH.\,FG\\ KO.\,OH\end{matrix}\right\} < \alpha^2.$

Beweis.

Es ist $KO.\,OH < \alpha^2$ (Det.)

also $\left.\begin{matrix}OH:\alpha\\ \alpha:LF\end{matrix}\right\} < \alpha:\left\{\begin{matrix}KO\\ FG\end{matrix}\right.$

folglich $LF > FG$

mithin fällt der Punkt L auf GD.

Da $OG : GL = XF : FL$

so ist $FX.\,GL = OG.\,FL$

$= \alpha^2.$

Zus.

Für eine andere, die Linien FA, GD in Y, Z schneidende gerade Linie OZ ist

$$FZ \gtrless FL$$

also $\left.\begin{matrix}OG.\,FZ\\ FY.\,GZ\end{matrix}\right\} \gtrless \left\{\begin{matrix}OG.\,FL\\ FX.\,GL\end{matrix}\right.$

folglich bestimmen die dem Punkte G näher liegenden Punkte der Linie GD kleinere Rechtecke, als die entfernteren.

Fall 2. (Fig. 16.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, CD liegen.

Anal. Contsr.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Determination.

Damit LF kleiner, als FG werde, muſs seyn

$$\left.\begin{array}{r} \alpha : LF \\ FK : \alpha \end{array}\right\} > \alpha : FG$$

folglich $KF . FG > \alpha^2$.

Beweis.

Es ist $KF . FG > \alpha^2$ (Det.)

also $\left.\begin{array}{r} KF : \alpha \\ \alpha : LF \end{array}\right\} > \alpha : FG$

folglich $LF < FG$

mithin liegt der Punkt L zwischen F, G.

Da $OH : GL = XF : FL$

so ist $FX . GL = OG . FL$
$= \alpha^2$.

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien FB, GF in Y, Z schneidende, gerade Linie OY ist $FZ \gtrless FL$

also $\left.\begin{array}{r} OG . FZ \\ FY . GZ \end{array}\right\} \gtrless \left\{\begin{array}{l} OG . FL \\ FX . GL \end{array}\right.$

folglich bestimmen die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie FG kleinere Rechteke, als die entfernteren.

F a l l 3. (Fig. 17.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, CD liegen.

A n a l. C o n s t r.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

B e w e i s.

$$\text{Es ist } \overline{OG : GL = XF : FL}$$

$$\text{also } FX.\,GL = OG.\,FL$$
$$= \alpha^2.$$

Z u s.

Für eine andere, die Linien FA, GC schneidende, gerade Linie OZ ist

$$\underline{FZ \gtrless FL}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} OG.\,FZ \\ FY.\,GZ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} > \\ \leq \end{matrix} \left\{\begin{matrix} OG.\,FL \\ FX.\,GL \end{matrix}\right.$$

folglich bestimmen die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie FC kleinere Rechtecke, als die entfernteren.

b.) *zwischen F, H.* (Fig. 18-22.). (Loc. VI.).

F a l l 1. (Fig. 18. 19.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

A n a l y s i s.

Buchstäblich, wie zu Loc. IV. Fall. 2.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Loc. IV. Fall. 1.

Determination.

Damit der Kreis der Linie MN begegne, mufs seyn

$$\left.\begin{matrix} ME.FN \\ EG.FH \end{matrix}\right\} \overline{\gtrless}\ \tfrac{1}{4}FE^2$$

$$\text{also } 4EG.FH \overline{\gtrless} \left\{\begin{matrix} (FG+GE)^2 \\ FG^2+2FG.GE+EG^2 \end{matrix}\right.$$

folglich

$$(2HF-FG)^2 \overline{\gtrless} FG^2-2EG(2HF-FG)+EG^2+(2HF-FG)^2$$

mithin

$$\left.\begin{matrix} 4FH^2-4HF.FG \\ 4FH.HG \end{matrix}\right\} \overline{\gtrless} \left\{\begin{matrix} (GE-(2HF-FG))^2 \\ (GE-(FH+HG))^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } FH+HG+2\sqrt{FH.HG} \overline{\gtrless} GE$$

$$\text{demn. } OH(FH+HG+2\sqrt{FH.HG}) \overline{\gtrless} \left\{\begin{matrix} OH.GE \\ \alpha^2 \end{matrix}\right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } OH(FH+HG+2\sqrt{FH.HG}) \overline{\gtrless}\ \alpha^2$$

$$\text{also } ME.FN \overline{\gtrless}\ \tfrac{1}{4}FE^2$$

wie aus der Det. leicht hervorgeht, mithin berührt (Fig. 18.), oder schneidet (Fig. 19.) der Kreis die Linie MN.

Auch ist $FL.LE = EM.FN$

folglich $FX.GL = \alpha^2$ (buchst. wie Loc. IV. Fall. 1.)

Zus. 1. 2. (Fig. 18. 19.)

Buchstäblich, wie Loc. IV. Fall 4. Zus. 1. 2.

Fall 2. (Fig. 20.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GH liegen.

Anal. und Constr.

Buchstäblich, wie zu Loc. IV. Fall 1.

Beweis.

$$\text{Es ist } FL.LE = EM.FN$$
$$= HF.EG$$

$$\text{also } FL.LE < FH.HE$$

$$\text{folglich } FL < FH$$
$$\text{Da } HF:FL = LE:EG$$

$$\text{so ist } GE < EL$$

mithin liegt der Punkt L zwischen G, H.

$$\text{Ferner ist } \left.\begin{matrix} HL:LF \\ OH:FX \end{matrix}\right\} = LG:GE$$

$$\text{somit } FX.GL = OH.GE$$
$$= a^2$$

Zus. 1.

Es erhellet leicht, wie Loc. IV. Fall 1. Zus. 1., dafs die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie GH kleinere Rechtecke bestimmen, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man auch in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf MN, so ist, wenn die, den Durchschnitt L′ des Perpendikels mit der Linie CD verbindende, die Linie AB in X′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird,

$$FL'.L'E = HF.EG$$

also $HF:FL' = L'E:EG$

folglich $\left.\begin{matrix}HL':L'F\\ OH:FX'\end{matrix}\right\} < L'G\cdot GE$

mithin $FX'.GL' = OH.GE$
$= a^2$

demnach ist eine Linie OL' gefunden, welche von den Linien FA, GC Segmente mit der gegebenen Ei genschaft abschneidet, welches Fall 4. ist.

Fall 3. (Fig. 21. 22.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GF liegen.

Analysis.

Buchstäblich, wie zu Loc. IV. Fall 2.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Loc. IV. Fall 1.

Determination.

Damit der Kreis der Linie MN begegne, mufs seyn

$$FH.EG \overline{<} \tfrac{1}{4} FE^2$$

also $4FH.EG \overline{<} \left\{\begin{matrix}(FG+GE)^2\\ FG^2+2FG.GE+GE^2\end{matrix}\right.$

folglich
$(2HF-FG)^2 \overline{<} FG^2-2GE(2FH-FG)+GE^2+(2HF-FG)^2$

mithin $\left.\begin{matrix}4FH^2-4HF.FG\\ 4FH.HG\end{matrix}\right\} \overline{<} \left\{\begin{matrix}(2FH-HG-GE)^2\\ (FH+HG-GE)^2\end{matrix}\right.$

somit $EG \leqq FH + HG - 2\sqrt{FH.HG}$

demnach $\left.\begin{matrix} OH.GE \\ \alpha^2 \end{matrix}\right\} \leqq OH(FH + HG - 2\sqrt{FH.HG})$

B e w e i s.

Es ist $\alpha^2 \leqq OH\,(FH + HG - 2\sqrt{FH.HG})$

also $ME.FN \leqq \frac{1}{4} FE^2$

wie aus der Determination leicht hervorgehet, mithin berührt (Fig. 21.), oder schneidet (Fig. 22.) der Kreis die Linie MN.

Da $GE \leqq FH + HG - 2\sqrt{FH.HG}$

so ist $\left.\begin{matrix} FG + GE \\ FE \end{matrix}\right\} \leqq \left\{\begin{matrix} FG + FH + HG - 2\sqrt{FH.HG} \\ 2FG + 2GH \;- 2\sqrt{FH.HG} \end{matrix}\right.$

also $\frac{1}{2} FE \leqq FG - (\sqrt{FH.HG} - GH)$

folglich fällt der Halbirungspunkt von FE zwischen F, G, mithin liegt L zwischen F, G.

Ferner ist $FL.LE = FH.EG$

also $HF : FL = LE : EG$

mithin $\left.\begin{matrix} HL : LF \\ OH : FX \end{matrix}\right\} = LG : GE$

folglich $FX.GL = OH.GE$
$= \alpha^2.$

Z u s. 1. (Fig. 21.)

Für eine andere, die Linien AB, FG in Y, Z schneidende, gerade Linie OZ ist

$$FZ.ZE < \left\{\begin{matrix} FL.LE \text{ (El. II. 5.)} \\ HF.GE \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } HF : FZ > ZE : EG$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} HZ : ZF \\ OH : FY \end{matrix}\right\} > ZG : GE$$

$$\text{mithin } FY.GZ < \left\{\begin{matrix} OH.GE \\ \alpha^2 \\ FX.GL \end{matrix}\right.$$

demnach bestimmt der Halbirungspunkt L von FG, für welchen $HL = \sqrt{GH.HF}$, ein gröfseres Rechteck, als jeder andere Punkt der Linie FG.

Ferner sey Ot eine, die Linien EF, AB in t, V schneidende, gerade Linie, auch $tL > LZ$, so ist

$$\begin{aligned} KY.HZ &= KO.OH \text{ (El. VI. 16.)} \\ &= KV.Ht \end{aligned}$$

$$\text{also } VK : KY = ZH : Ht$$

$$\text{folglich } VY : YK = Zt : tH$$

$$\text{Da } tH \lessgtr HZ$$

$$\text{so ist } \left.\begin{matrix} Zt : tH \\ VY : YK \end{matrix}\right\} \gtrless tZ : ZH$$

$$\text{folglich } VY : tZ \gtrless KY : HZ$$

$$\text{Da } LH \gtrless HZ$$

$$\text{so ist } \left.\begin{matrix} LH^2 \\ GH.HF \end{matrix}\right\} \gtrless HZ^2$$

$$\text{mithin}\quad \left.\begin{array}{l} FH \left\{ : HZ \right. \\ OK \\ KY \;: OH \end{array}\right\} \gtrless ZH : HG$$

$$\text{demnach}\quad KY : HZ \gtrless \left\{\begin{array}{l} OH \\ FK \end{array}\right\} : HG$$

$$\text{also}\quad VY : tZ \gtrless FK : HG$$

$$\text{folglich}\quad VY . HG \gtrless FK . tZ$$

mithin für das obere Zeichen

$$HG.VK - HG.KY > FK.HZ - FK.Ht$$

$$\text{somit}\quad \left\{ \left\{\begin{array}{c} FK.GH - FK.HZ \\ FK.GZ \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c} (HG.KY - KY.HZ) \\ KY.GZ \end{array}\right\} \atop FY.GZ \right\}$$

$$> \left\{ \left\{\begin{array}{c} FK.GH - VK.GH \\ FV.GH \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c} (FK.Ht - KV.Ht) \\ FV.Ht \end{array}\right\} \atop FV.Gt \right\}$$

Für das untere Zeichen ist

$$HG.KY - HG.VK < FK.Ht - FK.HZ$$

$$\text{somit}\quad \left\{ \left\{\begin{array}{c} FK.GH - VK.GH \\ FV.GH \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c} (FK.Ht - KV.Ht) \\ FV.Ht \end{array}\right\} \atop FV.Gt \right\}$$

$$> \left\{ \left\{\begin{array}{c} FK.GH - FK.HZ \\ FK.GZ \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c} (HG.KY - KY.HZ) \\ GZ.KY \end{array}\right\} \atop FY.GZ \right\}$$

also bestimmen die dem Punkte L auf einerley Seite näher liegenden Punkte der Linie FG gröſsere Rechtecke, als die entfernteren. Uebrigens kann von zwey

auf verschiedenen Seiten des Punktes L liegenden Punkten der dem Punkte L näher liegende ein kleineres Rechteck bestimmen, als der entferntere. conf. Apoll. de sect. det. L. I. pr. 2. Ep. 2. a.

Z u s. 2. (Fig. 22.)

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf MN, so ist, wenn, die, den Durchschitt L′ des Perpendikels mit der Linie FE verbindende, die Linie FB in X′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird,

$$FL'.L'E = FH.EG$$

also $FL'.L'E > FG.GE$

folglich liegt L′ dem Halbirungspunkte von FE näher, als G. Da auch beide auf derselben Seite des Halbirungspunktes liegen, so ist $L'F < FG$.

Auch ist $HF:FL' = L'E:EG$

folglich $\left.\begin{matrix} HL':L'F \\ OH:FX' \end{matrix}\right\} = L'G:GE$

mithin $FX'.GL' = OH.GE$
$= \alpha^2.$

demnach bestimmt der Punkt L′ ein zweites Rechteck auf den Linien GF, FB mit der gegebenen Eigenschaft.

F a l l 4. (Fig. 20.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GC liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen GL′, FX′ die gesuchten Segmente. Es sey auch OH ⧣ AB, und GE so bestimmt, dass OH. GE

$= \alpha^2$, so ist $OH . GE = FX' . GL'$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} OH : FX' \\ HL' : L'F \end{matrix}\right\} = L'G : GE$$

$$\text{folglich } HF : FL' = L'E : EG$$

$$\text{mithin } FL' . L'E = HF . EG$$

demnach ist $FL' . L'E$, und da FE gegeben ist, auch FL' (Dat. 84.), somit L', und die Lage der geraden Linie OL' gegeben.

Construction.

Man ziehe $OH \# QG \# AB$, $OK \# CD$, mache $QG = GT = \alpha$, $QE \# PT$, $EFN = R = FEM$, $ME = EG$, $NF = FH$, beschreibe über EF als Durchmesser einen Kreis, welcher der geraden Linie MN in R' begegne, und errichte in R' auf MN ein, die Linie CD in L' schneidendes, Perpendikel. Zieht man die, die Linie AB in X' schneidende, gerade Linie OL', so sind FX', GL' die gesuchten Segmente.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } FL' . L'E &= EM . FN \\ &= EG . FH \end{aligned}$$

$$\text{also } HF : FL' = L'E : EG$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} HL' : L'F \\ OH : FX' \end{matrix}\right\} = L'G : GE$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } FX' . GL' &= OH . GE \\ &= PG . GE \\ &= QG . GP \\ &= \alpha^2 \end{aligned}$$

Zus. 1.

Es erhellet leicht, wie Loc. IV. Fall 1. Zus. 1., daſs die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie FC kleinere Rechtecke bestimmen, als die entfernteren.

Zus. 2.

Der zweite Durchschnitt R des Kreises und der Linie MN bestimmt Segmente mit der gegebenen Eigenschaft auf den Linien FA, GD, welches Fall 2. ist, wie aus Fall 2. Bew. hervorgehet.

c.) *auf der Linie HD.* (Fig. 23. 24.). (Loc. VII.)

Fall 1. (Fig. 23.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

Analysis.

Buchstäblich, wie zu Loc. IV. Fall 2.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Loc. IV. Fall 1.

Beweis.

Es ist $HF < FG$

also $HF.EG < FG.GE$

Da $FG.GE \overline{\gtrless} \frac{1}{4}FE^2$ (El. II. 5.)

so ist $\left.\begin{matrix} HF.EG \\ FN.EM \end{matrix}\right\} < \frac{1}{4}FE^2$

mithin schneidet der Kreis die Linie MN.

Ferner ist $FL.LE = FH.EG$

also $FL.LE < FG.GE$

folglich $LE < EG$.

Da auch $HF:FL = LE:EG$

$$\text{so ist } \left.\begin{matrix} HL:LF \\ OH:FX \end{matrix}\right\} = LG:GE$$

$$\text{mithin } FX.GL = OH.GE$$
$$= a^2.$$

Z u s. 1.

Es ist $FG.GE > FL.LE$ (Bew.)

also liegt G dem Halbirungspunkte von FE näher, als L, mithin ist, wenn die, die Linien GE, AB in Z, Y schneidende, gerade Linie OZ gezogen wird,

$$FZ.ZE \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \left\{\begin{matrix} FL.LE, \\ HF.GE \end{matrix}\right. \text{ je nachdem } ZG \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} GL;$$

$$\text{also } HF:FZ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} ZE:EG$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} HZ:FZ \\ OH:FY \end{matrix}\right\} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} GZ:GE$$

$$\text{mithin } FY.GZ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \left\{\begin{matrix} OH.GE \\ FX.GL \end{matrix}\right.$$

demnach bestimmen die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie GE kleinere Rechtecke, als die entfernteren.

Z u s. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein, die Linie CD in L′ schneidendes, Perpendikel auf MN, so ist

$$FL'.L'E = HF.EG$$

also $FL'.L'E < FG.GE$

folglich $L'E > EG$

Da $HF:FL' = L'E:EG$

so ist $HF > FL'$

mithin liegt L' zwischen F, H.

Ferner ist $\left.\begin{array}{r} HL':FL' \\ OH:FX' \end{array}\right\} = L'G:GE$ wenn OL' der Linie FB in X' begegnet;

somit $FX'.GL' = OH.GE$

$= a^2$

also ist eine Linie OL' gefunden, welche von den Linien FB, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 3. ist.

F a l l 2. (Fig. 24.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GH liegen.

Anal. Contsr.

Buchstäblich, wie zu Loc. IV. Fall 1.

B e w e i s.

Es ist $FL.LE = FH.EG$

also $FL.LE < FG.GE$

folglich $LE < EG$

Da $HF:FL = LE:EG$

so ist $HF < FL$

mithin liegt der Punkt L zwischen H, G.

Ferner ist $\left.\begin{array}{r} HL:LF \\ OH:FX \end{array}\right\} = LG:GE$

also $FX.GL = OH.GE$

$= a^2$.

Z u s. 1.

Für eine andere, die Linien GH, AB in Z, Y schneidende, gerade Linie OZ ist

$$FZ.ZE \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{cases} FL.LE \\ FH.EG \end{cases}$$

$$\text{also } HF:FZ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} ZE:EG$$

$$\text{folglich } \begin{matrix} HZ:FZ \\ OH:FY \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} GZ:GE$$

$$\text{mithin } FY.GZ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \begin{cases} OH.GE \\ FX.GL \end{cases}$$

demnach bestimmen die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie GH gröſsere Rechteke, als die entfernteren.

Z u s. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein, die Linie CD in L′ schneidendes, Perpendikel auf MN, so ist, wenn die, die Linie AB in X′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird,

$$FL'.L'E = OH.GE$$

$$\text{also } FL'.GX' = \alpha^2, \text{ wie leicht erhellet.}$$

mithin ist eine Linie OL′ gefunden, welche von den Linien FA, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 4. ist.

F a l l 3. (Fig. 23.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GF liegen.

Anal. Constr.

Buchstäblich, wie zu Loc. IV. Fall 3.

Beweis.

Es ist $FL'.L'E = HF.EG$

---

also $FX'.GL' = \alpha^2$, (buchst. wie Loc. VII. Fall 1. Zus. 2.).

Zus. 1.

Es ist $FG.GE > FL.LE$

also liegt G dem Halbirungspunkte von FE näher, als L, mithin ist, wenn die, die Linien HF, AB in Z′, Y′ schneidende, gerade Linie OZ′ gezogen wird,

$$FZ'.Z'E \gtrless \begin{cases} FL.LE, \\ HF.GE \end{cases} \text{je nachdem } Z'G \lessgtr GL;$$

---

also $HF : FZ' \lessgtr Z'E : EG$

---

folgl. $\left.\begin{matrix} HZ' : FZ' \\ OH : FY' \end{matrix}\right\} \gtrless GZ : GE$

---

mithin $FY'.GZ' \lessgtr \begin{cases} OH.GF \\ FX.GL \end{cases}$

demnach bestimmen die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie HF größere Rechtecke, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein, die Linie CD in L schneidendes, Perpendikel auf MN, so ist, wenn die, die Linie AB in X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird,

FL.LE = FH.EG

also FX.GL = α^2, wie Loc. VII. Fall. 1. Bew. mithin ist eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FA, GD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist.

F a l l 4. (Fig. 24.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GC abgeschnitten werden.

A n a l. C o n s t r.

Buchst.', wie zu Loc. IV. Fall. 3.

B e w e i s.

$$\begin{aligned}
\text{Es ist } FL'.L'E &= EM.FN \\
&= EG.FH \\
\hline
\text{also } HF:FL' &= L'E:EG \\
\hline
\text{folglich } \left.\begin{matrix} HL':L'F \\ OH:FX' \end{matrix}\right\} &= L'G:GE \\
\hline
\text{mithin } FX'.GL' &= OH.GE \\
&= PG.GE \\
&= QG.GP \\
&= \alpha^2.
\end{aligned}$$

Z u s. 1.

Es erhellet leicht, wie Loc. IV. Fall 1. Zus. 1., daſs die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie FC kleinere Rechtecke bestimmen, als die entfernteren.

Z u s. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein, die Linie CD in

L schneidendes, Perpendikel auf MN, so ist, wenn die, die Linie AB in X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird,

$$FL.LE = FH.EG$$

$$\text{also } FL.LE < FG.GE$$

$$\text{folglich } LE < EG.$$

$$\text{Da } HF:FL = LE:EG$$

$$\text{so ist } HF < FL$$

mithin liegt der Punkt L zwischen H, G.

$$\text{Ferner ist } \left.\begin{matrix} HL:LF \\ OH:FX \end{matrix}\right\} = LG:GE$$

$$\text{somit } FX.GL = OH.GE$$
$$= a^2$$

demnach ist auch eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FA, GH Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 2. ist.



Zweites Buch.

Von einem, in einer gegebenen Ebene, gegebenen Punkte aus, durch zwey, ausserhalb desselben, in dieser Ebene gegebene, einander schneidende gerade Linien, eine gerade Linie so zu ziehen, dafs das Rechteck aus den zwischen den Durchschnittspunkten mit jenen Linien, und zweyen in denselben, ausserhalb ihres Durchschnittspunktes, gegebenen Punkten enthaltenen Segmenten von gegebener Gröfse sey (Fig. 25—69.).

Der gegebene Flächenraum sey dem Quadrate der gegebenen Linie a gleich. Bezeichnet man den Durchschnittspunkt der Linien AB, CD mit I, so liege der auf der Linie AB gegebene Punkt F

I.) *auf der Linie IB* (Fig. 25—47.). (Loc. I—VI.). *Der auf der Linie CD gegebene Punkt G liege*

1.) *auf IC.* (Fig. 25—29.). (Loc. I.)

F a l l 1. (Fig. (25. 26.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GI liegen.

Analysis.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente, es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF, und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV $\#$ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FX:EV \\ FX.GL \left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\} : EV.GL \\ \alpha^2 \end{array}\right\} = FO:OE$$

also ist EV. GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. IV. Fall 2. reducirt.

Construction.

Man ziehe die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF, OH $\#$ EV $\#$ AB $\#$ GP, OP $\#$ CD $\#$ FU, mache $QU = UT = \alpha$, QW $\#$ PT, WS $\#$ AB, GSN $=$ HEM $=$ R, NS $=$ SG, ME $=$ EH, beschreibe über ES als Durchmesser einen Kreis, welcher der geraden Linie MN in R begegne, errichte in R auf der Linie MN ein, die Linie CD in L schneidendes, Perpendikel, und ziehe die, die Linien AB, EV in X, V schneidende, gerade Linie OL, so sind FX, GL die gesuchten Segmente.

A.) Es sey $HI = \sqrt{EH.HG}$. (Fig. 25. 26. a.)

Determination.

Vermöge Lib. I. Loc. IV. Fall 2. Det. mufs seyn

$$PG.GS \leqq OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{also } PU.UW : PG.GS \\ UP : PG \\ FK : KT \\ FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE}) : KI\,(GH+HE-2\sqrt{GH.HE}) \end{array}\right\}$$

$$\geqq \alpha^2 : OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{folglich } FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE}) \geqq \alpha^2$$

Beweis.

Es ist $FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE}) \geqq \alpha^2$

also

$$\left.\begin{array}{r} FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE}):OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE}) \\ FK:OH \\ UP:PG \\ PU.UW:PG.GS \end{array}\right\} \geqq \alpha^2:OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

folglich $PG.GS \leqq OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

mithin berührt (Fig. 25.), oder schneidet (Fig. 26. a.) der Kreis die Linie MN.

Ferner ist $GS \leqq \left\{\begin{array}{l} GH+HE-2HI \text{ (Bew.)} \\ GI-IE \end{array}\right.$

also $\left.\begin{array}{l} EG-GS \\ 2E\beta \end{array}\right\} \geqq \left\{\begin{array}{l} EG-GI+IE \\ 2EI \end{array}\right.$, wenn $E\beta=\beta S$;

folglich $E\beta \geqq EI$

mithin fällt der Punkt L auf IG.

Endlich ist $EV.GL = PG.GS$ (Lib.I. Loc. IV. Fall 2. Bew.)

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} PU.UW \\ \alpha^2 \end{array}\right\} : EV.GL \begin{array}{l} = PU.UW:PG.GS \\ = UP:PG \\ = FO:OE \\ = FX:EV \\ = FX.GL:EV.GL \end{array}$$

folglich $FX.GL = \alpha^2$.

Zus. 1. (Fig. 25.)

Für eine andere, die Linien EV, AB, IS in r, Y Z schneidende, gerade Linie OZ ist

$$\left.\begin{array}{r} FY : Er \\ FY.GZ : Er.GZ \end{array}\right\} \begin{array}{l} = FO : OE \\ = FX.GL : EV.GL \end{array}$$

$$\text{Es ist } Er.GZ < EV.GL \quad \text{(Lib. I. Loc. IV. Fall 2. Zus. 1.)}$$

$$\overline{\text{als } FY.GZ < FX.GL}$$

folglich bestimmt der Punkt L, für welchen $HL = \sqrt{GH.HE}$, ein gröſseres Rechteck, als jeder andere Punkt der Linie IG.

Für eine dritte, die Linien EV, AB, IS in t, n, u schneidende, gerade Linie OU, für welche $UL > LZ$, ist

$$\left.\begin{array}{r} Fn : Et \\ Fn.Gu : Et.Gu \end{array}\right\} \begin{array}{l} = FO : OE \\ = FY.GZ : Er.GZ \end{array}$$

$$\text{Es ist } Et.Gu < Er.GZ \quad \text{(Lib. I. Loc. IV. Zus. 2.)}$$

$$\overline{\text{also } Fn.Gu < FY.GZ}$$

mithin bestimmen die dem Punkte L näher liegenden Punkte der Linie IG gröſsere Rechtecke, als die entfernteren.

Anm. Da alle Aufg. des 2. Buches auf Aufg. des ersten reducirt werden, so lassen sich zu allen folgenden Aufgaben Zusätze derselben Art aus denen des ersten Buches herleiten, welches von nun an nicht weiter geschehen soll.

Zus. 2. (Fig. 26. a.)

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein, die Linie CD in L′ schneidendes, Perpendikel auf MN, so ist, wenn die, die Linien EV, AB in V′, X′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird, $EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. IV. Fall 2. Zus. 2.)

$$\text{also } \left.\begin{matrix}\text{PU.UW}\\ \alpha^2\end{matrix}\right\}:\text{EV}'.\text{GL}' = \left\{\begin{matrix}\text{PU.UW}:\text{PG.GS}\\ \text{UP}:\text{PG}\\ \text{FO}:\text{OE}\\ \text{FX}':\text{EV}'\\ \text{FX}'.\text{GL}':\text{EV}'.\text{GL}'\end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich FX}'.\text{GL}' = \alpha^2.$$

Und es liegt L′ zwischen E, I, oder in I, oder zwischen I, G, je nachdem $\left.\begin{matrix}\text{EL}'\\ \text{E}\beta-\beta\text{L}'\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\leq\\ >\end{matrix}\ \text{EI},$

$$\text{oder da } \beta\text{L}' = \sqrt{\text{E}\beta^2\text{-GS.EH}},$$

$$\text{je nachdem } \left.\begin{matrix}(\text{E}\beta-\text{EI})^2\\ \text{E}\beta^2-2\beta\text{E.EI}+\text{EI}^2\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\leq\\ >\end{matrix}\ \text{E}\beta^2-\text{GS.EH}$$

$$\text{folglich EI}^2 \begin{matrix}\leq\\ >\end{matrix}\left\{\begin{matrix}2\text{IE.E}\beta\text{-GS.EH}\\ (\text{EG-GS})\,\text{EI-GS.EH}\\ \text{IE.EG-GS.HI}\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin GS.HI} \begin{matrix}\leq\\ >\end{matrix}\left\{\begin{matrix}(\text{GE-EI})\,\text{IE}\\ \text{GI.IE}\end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix}\text{EI}:\text{IH}\\ \text{IF}:\text{FK}\\ \text{GI.IF}:\text{GI.FK}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\geq\\ <\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{SG}:\text{GI}\\ \left.\begin{matrix}\text{SG.FK}\\ \alpha^2\end{matrix}\right\}:\text{GI.FK}\end{matrix}\right.$$

$$\text{demnach FI.IG} \begin{matrix}\geq\\ <\end{matrix}\ \alpha^2.$$

also ist eine Linie OL′ gefunden, welche von den Linien FI, GD, oder FA, GI Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 3. oder Fall 1. ist.

B.) Es sey HI $< \sqrt{\text{GH.HE}}$. (Fig. 26. b. a.)

Determination.

Buchstäblich, wie zu A.

Beweis.

Es ist

$FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE}) \gtreqless \alpha^2$

mithin $PG.GS \lesseqgtr OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

also berührt (Fig. 26. b.), oder schneidet (Fig. 26. a.) der Kreis die Linie MN.

Ferner ist $GS < \begin{cases} GH+HE-2HI \\ GI-IE \end{cases}$

also $\begin{matrix} EG-GS \\ 2E\beta \end{matrix} > \begin{matrix} EG-GI+IE \\ 2EI, \end{matrix}$ wenn $E\beta = \beta S$;

folglich $E\beta > EI$

mithin liegt der Punkt L zwischen I, G.

Auch ist $EV.GL = PG.GS$

folglich $FX.GL = \alpha^2$ (wie zu A.).

Zus. (Fig. 26. a.)

Buchstäblich, wie A. Zus. 2.

C.) Es sey $HI > \sqrt{GH.HE}$ (Fig. 26. a.)

a.) Es sey $\alpha^2 \lesseqgtr FK(GI-IE)$

Beweis.

Es ist $\begin{matrix} \alpha^2 \\ FK.GS \end{matrix} \lesseqgtr \begin{matrix} FK(GI-IE) \\ FK(GH+HE-2HI) \end{matrix}$

also $GS < GH+HE-2\sqrt{GH.HE}$

folglich schneidet der Kreis die Linie MN.

$$\text{Ferner ist } 2HI \overset{=}{<} \begin{cases} GH+HE-GS \\ GE+2HE-GS \end{cases}$$

$$\text{folglich } HI \overset{=}{<} \begin{cases} HE+\begin{cases} \dfrac{EG-GS}{2} \\ E\beta, \text{ wenn } E\beta=\beta S; \end{cases} \\ H\beta \end{cases}$$

mithin fällt der Punkt L auf IG.

$$\text{Endlich ist } EV.GL = PG.GS$$

$$\text{folglich } FX.GL = \alpha^2 \text{ (wie zu A.)}.$$

Z u s.

Buchstäblich, wie A. Zus. 2.

b.) Es sey $\alpha^2 > FK(GI-IE)$ (Fig. 27.)

D e t e r m i n a t i o n.

$$\text{Da } \begin{matrix} \alpha^2 \\ FK.GS \end{matrix} \Big\} > \Big\{ \begin{matrix} FK(GI-IE) \\ FK(GH+HE-2HI) \end{matrix}$$

$$\text{so ist } GS > GH+HE-2HI$$

$$\text{also } HI > \begin{cases} \dfrac{GH+HE-GS}{2} \\ HE+\begin{cases} \dfrac{EG-GS}{2} \\ E\beta, \text{ wenn } E\beta=\beta S; \end{cases} \\ H\beta \end{cases}$$

Damit L auf IG falle, muſs also seyn

$$E\beta+\beta L \overset{=}{>} EI$$

$$\text{folglich } L\beta \overset{=}{>} IE-E\beta$$

$$\text{Es ist } E\beta^2-\beta L^2 = SG.EH$$

mithin $\sqrt{E\beta^2\text{-}SG.EH} = L\beta$

demnach muſs seyn $E\beta^2\text{-}SG.EH \geqq IE^2 - 2IE.E\beta + E\beta^2$

also $\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}2IE.E\beta\\ IE(EG-GS)\end{array}\right\}\text{-}SG.EH\\ IE.EG\text{-}SG.HI\end{array}\right\}\geqq IE^2$

folglich $\left.\begin{array}{r}IE(GE-EI)\\ EI.IG\end{array}\right\}\geqq SG.HI$

mithin $\left.\begin{array}{r}EI:IH\\ IF:FK\\ GI.IF:GI.FK\end{array}\right\}\geqq\left\{\begin{array}{l}SG:GI\\ \left.\begin{array}{c}SG.FK\\ \alpha^2\end{array}\right\}:GI.FK\end{array}\right.$

somit $GI.IF \geqq \alpha^2$.

Beweis.

Es ist $HI > \sqrt{GH.HE}$

also $\left.\begin{array}{r}HI^2\\ HI(HE+EI)\end{array}\right\}+GH.HE > 2HI\sqrt{GH.HE}$

folglich $(GH+HI)\,HE > (2\sqrt{GH.HE}-EI)\,HI$

somit $\left.\begin{array}{r}EH:HI\\ 2EH:2HI\end{array}\right\} > \left\{\begin{array}{l}2\sqrt{GH.HE}-EI:\left\{\begin{array}{l}GH+HI\\ GI+2HI\end{array}\right.\\ 2\sqrt{GH.HE}-EI-2EH:GI\end{array}\right.$

demnach $\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}IH-HE\\ EI\end{array}\right\}:HI\\ IF:FK\end{array}\right\}<\left.\begin{array}{c}GI+IE+2EH\\ GH+HE\end{array}\right\}-2\sqrt{GH.HE}:GI$

also $FI.IG < FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

Es ist $\alpha^2 \leqq FI.IG$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{r}\alpha^2\\ FK.GS\end{array}\right\} < FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

mithin schneidet der Kreis die Linie MN.

$$\text{Ferner ist } \left.\begin{array}{r} FI.IG : GI.FK \\ IF : FK \\ EI : IH \end{array}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c}\alpha^2\\ FK.GS\end{array}\right\} : GI.FK \\ \qquad SG : GI \end{array}\right.$$

$$\text{somit } \left.\begin{array}{r} EI.IG \\ EI(GE-EI) \end{array}\right\} \overset{=}{>} SG.IH$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} EI.GE-SG.HI \\ \left.\begin{array}{r} EI(GE-GS) \\ 2IE.E\beta \end{array}\right\} -SG.EH \end{array}\right\} \overset{=}{>} EI^2$$

$$\text{folglich } E\beta^2-SG.EH \overset{=}{>} EI^2-2IE.E\beta+E\beta^2$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{r} \sqrt{E\beta^2-SG.EH} \\ L\beta \end{array}\right\} \overset{=}{>} EI-E\beta$$

$$\text{somit } \left.\begin{array}{r} E\beta+\beta L \\ EL \end{array}\right\} \overset{=}{>} EI$$

demnach liegt der Punkt L auf IG.

Endlich ist $EV.GL = PG.GS$

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie zu A.).

Z u s.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein, die Linie EI in L′ schneidendes, Perpendikel auf MN, so ist, wenn die, die Linien EV, AB in V′, X′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird, $EV'.GL' = PG.GS$.

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie A. Zus. 2.)
mithin ist eine Linie OL' gefunden, welche von den Linien FI, GD Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 3. ist.

Fall 2. (Fig. 28.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GC liegen.

Analysis.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie $EV \# AB$ gezogen, so ist

$$\left.\begin{matrix} FX : EV \\ \left.\begin{matrix} FX.GL \\ \alpha^2 \end{matrix}\right\} : EV.GL \end{matrix}\right\} = FO : OE$$

also ist $EV.GL$ gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib I. Loc. IV. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Beweis.

Es ist $\underline{EV.GL = PG.GS}$ (Lib. I. Loc. IV. Fall. 1. Bew.)

$$\text{also } \left.\begin{matrix} PU.UW \\ \alpha^2 \end{matrix}\right\} : EV.GL = PU.UW : PG.GS$$
$$= UP : PG$$
$$= FO : OE$$
$$= FX : EV$$
$$= FX.GL : EV.GL$$

---

folglich $FX.GL = \alpha^2$.

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie EH (verm. Lib. I. Loc. IV. Fall 1. Zus. 2.) so, daſs, wenn die, die Linien EV, FB in V′, X′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird,

$$EV'.GL' = PG.GS$$

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Fall 1. A. Zus. 2.) mithin ist eine Linie OL′ gefunden, welche von den Linien FB, GD Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 4. ist.

Fall 3. (Fig. 26. a. 27.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, GD liegen.

Analysis.

Es seyen FX′, GL′ die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL′ in V′ schneidende, gerade Linie EV′ $\#$ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{l} FX' : EV' \\ \underbrace{FX'.GL'}_{\alpha^2} : EV'.GL' \end{array}\right\} = FO : OE$$

also ist EV′. GL′ gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. IV. Fall 2. reducirt.

Construction.

Man ziehe die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF, OH $\#$ EV′ $\#$ AB $\#$ GP, OP $\#$ CD $\#$ FU, mache $QU = UT = \alpha$, QW $\#$ PT, WS $\#$

AB, GSN = HEM = R, NS = SG, ME = EH, beschreibe über ES als Durchmesser einen Kreis, welcher der geraden Linie MN in R′ begegne, errichte in R′ auf der Linie MN ein, die Linie CD in L′ schneidendes, Perpendikel, und ziehe die, die Linien AB, EV′ in X′, V′ schneidende, gerade Linie OL′, so sind FX′, GL′ die gesuchten Segmente.

A.) Es sey HI > $\sqrt{GH.HE}$.

a.) Es sey α^2 > FK (GI—IE). (Fig. 27.)

Determination.

Buchstäblich, wie Fall 1. A. Det.

Beweis.

$$\text{Es ist } \alpha^2 \overline{\gtrless} GH + HE - 2\sqrt{GH.HE}$$

also berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN, wie Fall 1. A. Bew.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix}\alpha^2\\ FK.GS\end{matrix}\right\} > FK\,(GI - IE)$$

$$\text{also } GS > \left\{\begin{matrix}GI - IE\\ GH + HE - 2HI\end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } HI > \left\{\begin{matrix}\dfrac{GH + HE - GS}{2}\\ EH + \left\{\begin{matrix}\dfrac{EG - GS}{2}\\ E\beta\end{matrix}\right.\\ H\beta\end{matrix}\right.$$

mithin liegt L′ auf der Linie EI.

Ferner ist $EV'.GL' = PG.GS$

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Fall 1. A. Zus. 2.).

Z u s.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein, die Linie CD in L schneidendes, Perpendikel, so ist, wenn die, die Linien EV, AB in V, X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird, $EV.GL = PG.GS$

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Fall 1. A. Bew.)

Und es liegt der Punkt L zwischen G, I, oder in I, oder zwischen I, E,

je nachdem $E\beta + \beta L \gtreqless EI$

also $\beta L \gtreqless IE - E\beta$

folglich $\left.\begin{array}{r}\beta L^2\\ E\beta^2 - SG.EH\end{array}\right\} \gtreqless IE^2 - 2IE.E\beta + E\beta^2$

mithin $\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}2IE.E\beta\\ IE(EG - GS\end{array}\right\} - GS.EH\\ IE.EG - GS.HI\end{array}\right\} \gtreqless IE^2$

somit $\left.\begin{array}{r}IE(GE - EI)\\ EI.IG\end{array}\right\} \gtreqless GS.HI$

demnach $\left.\begin{array}{r}EI:IH\\ IF:FK\\ FI.IG:FK.IG\end{array}\right\} \gtreqless \left\{\begin{array}{l}SG:GI\\ \left.\begin{array}{l}SG.FK\\ \alpha^2\end{array}\right\}:FK.GI\end{array}\right.$

$$\text{also } FI.IG \gtreqless \alpha^2.$$

Es ist mithin eine Linie OL gefunden, welche von den Linien GI, FA, oder FI, GD Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 1. oder Fall 3. ist.

b.) Es sey $\alpha^2 \overset{=}{<} FK\ (GI - IE)$ (Fig. 26. a.)

Determination.

$$\text{Da } \left.\begin{matrix}\alpha^2\\ FK.GS\end{matrix}\right\} \overset{=}{<} FK(GI-IE)$$

$$\text{so ist } GS \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix}GI-IE\\ GH+HE-2HI\end{matrix}\right.$$

$$\text{also } HI \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix}\dfrac{GH+HE-GS}{2}\\ HE+\left\{\begin{matrix}\dfrac{EG-GS}{2}\\ E\beta,\ \text{wenn } E\beta=\beta S;\end{matrix}\right.\\ H\beta\end{matrix}\right.$$

Damit der Punkt L′ auf EI liege, mufs demuach seyn

$$E\beta - \beta L' \overset{=}{<} EI$$

$$\text{also } \beta E - EI \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix}\beta L'\\ \sqrt{E\beta^2 - GS.EH}\end{matrix}\right.$$

folglich

$$E\beta^2 - 2\beta E.EI + IE^2 \overset{=}{<} E\beta^2 - GS.EH$$

$$\text{mithin } EI^2 \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix}\left.\begin{matrix}2\beta E.EI\\ (GE-ES)EI\end{matrix}\right\} - GS.EH\\ IE.EG - GS.HI\end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } GS.HI \overset{=}{<} EI.IG$$

$$\text{demnach } \left.\begin{array}{r} EI:IH \\ IF:FK \\ FI.IG:FK.GI \end{array}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{array}{l} SG:GI \\ \left.\begin{array}{c} SG.FK \\ \alpha^2 \end{array}\right\} : FK.GI \end{array}\right.$$

$$\text{also } FI.IG \overset{=}{>} \alpha^2.$$

B e w e i s.

$$\text{Da } \left.\begin{array}{r} \alpha^2 \\ FK.GS \end{array}\right\} \overset{=}{<} FK(GI-IE)$$

$$\text{so ist } GS \overset{=}{<} \left\{\begin{array}{l} GI-IE \\ GH+HE-2HI \end{array}\right.$$

$$\text{also } GS < GH+HE-2\sqrt{GH.HE}$$

$$\text{folglich } PG.GS < OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

mithin schneidet der Kreis die Linie MN.

Ferner ist $FI.IG \overset{=}{>} \alpha^2$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} E\beta-\beta L' \\ EL' \end{array}\right\} \overset{=}{<} EI$$

wie aus der Determination leicht hervorgehet; mithin liegt der Punkt L' auf EI.
Endlich ist $EV'.GL' = PG.GS$

$$\text{also } FX'.GL' = \alpha^2 \text{ (wie Fall 1. A. Zus. 2.)}$$

Z u s.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe (verm. Lib. I. Loc. IV.

Fall 2. Zus. 2.) die Linie IG in L so, daſs, wenn die, die Linien EV, FA in V, X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird,

$$EV.GL = PG.GS$$

$$\text{also } FX.GL = \alpha^2 \text{ (wie Fall 1. A. Bew.)}$$

Es ist mithin eine Linie OL gefunden, welche von den Linien GI, FA Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 1. ist.

B.) Es sey $HI = \sqrt{GH.HE}$. (Fig. 25. 26. a.)

Determination.

Da, damit der Kreis die Linie MN erreiche, werden muſs $GS \leqq GH + HE - 2\sqrt{GH.HE}$

$$\text{so wird } GS \leqq \left\{ \begin{array}{c} GH + HE - 2HI \\ GI - IE \end{array} \right.$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{c} EG - GS \\ 2E\beta \end{array} \right\} \geqq \left\{ \begin{array}{c} EG - GI + IG \\ 2EI \end{array} \right. \text{, wenn } E\beta = \beta S;$$

$$\text{folglich } E\beta \geqq EI$$

Damit L′ auf EI falle, muſs demnach seyn

$$E\beta - \beta L' \leqq EI$$

$$\text{also } FI.IG \geqq \alpha^2, \text{ (wie A. Det.)}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } HI = \sqrt{GH.HE}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{c} HI^2 \\ HI(HE + EI) \end{array} \right\} + GH.HE = 2HI\sqrt{GH.HE}$$

folglich $(GH+HI)HE = (2\sqrt{GH.HE}-IE)HI$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} EH:HI \\ 2EH:2HI \end{matrix}\right\} = 2\sqrt{GH.HE}-IE : \left\{\begin{matrix} GH+HI \\ 2HI+IG \end{matrix}\right.$$

$$= 2\sqrt{GH.HE}-IE-2EH : IG$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} IH-HE \\ IE \end{matrix}\right\}:HI \\ IF:FK \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \left.\begin{matrix} IG+IE \\ GE \end{matrix}\right\}+2EH \\ GH+HE \end{matrix}\right\} - 2\sqrt{GH.HE}:IG$$

demnach $FI.IG = FK\,(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

Es ist $\alpha^2 \leqq FI.IG$ (Det.)

$$\text{also } \left.\begin{matrix} \alpha^2 \\ FK.GS \end{matrix}\right\} \leqq FK\,(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

folglich $PG.GS \leqq OH\,(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

mithin berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN.

Ferner ist $FI.IG : FK.GI \leqq \alpha^2 : FK.GI$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} E\beta-\beta L' \\ EL' \end{matrix}\right\} \leqq EI$$

wie aus der Determ. leicht hervorgehet.

Endlich ist $EV'.GL' = PG.GS$

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Fall. 1. A. Zus. 2.)

C.) Es sey $HI < \sqrt{GH.HE}$. (Fig. 26. a.)

Determination.

Da $GS \leqq GH+HE-2\sqrt{GH.HE}$ werden muſs,

$$\text{so wird } GS < \left\{\begin{matrix} GH+HE-2HI \\ GI-IE \end{matrix}\right.$$

also $\left.\begin{matrix}EG-GS\\ 2E\beta\end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix}EG-GI+IE\\ 2EI\end{matrix}\right.$, wenn $E\beta=\beta S$;

folglich $E\beta > EI$

Damit L' auf EI falle, muſs demnach seyn

$$E\beta-\beta L' \leqq EI$$

also $FI.IG \geqq \alpha^2$ (wie A. Det.).

Beweis.

Es ist $HI < \sqrt{GH.HE}$

also $\left.\begin{matrix}HI^2\\ HI(HE+EI)\end{matrix}\right\} + GH.HE > 2HI\sqrt{GH.HE}$

folgl. $(GH+HI)HE > (2\sqrt{GH.HE}-EI)\,HI$

mithin $\left.\begin{matrix}EH:HI\\ 2EH:2HI\end{matrix}\right\} > 2\sqrt{GH.HE}-EI : \left\{\begin{matrix}GH+HI\\ GI+2IH\end{matrix}\right.$

somit $EH:HI > 2\sqrt{GH.HE}-EI-2EH:GI$

demnach

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}IH-HE\\ IE\end{matrix}\right\}:HI\\ IF:FK\end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix}\left.\begin{matrix}GI+IE\\ GE\end{matrix}\right\}+2EH\\ GH+HE\end{matrix}\right\} - 2\sqrt{GH.HE}:IG$$

also $FI.IG < FK\,(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

Es ist $\alpha^2 \leqq FI.IG$ (Det.)

folglich $\left.\begin{matrix}\alpha^2\\ FK.GS\end{matrix}\right\} < FK\,(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

somit $PG.GS < OH\,(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

mithin schneidet der Kreis die Linie MN.

Ferner ist $\underline{FI.IG : FK.GI} \mathrel{\substack{=\\>}} \underline{\alpha^2 : FK.GI}$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} E\beta - \beta L' \\ EL' \end{matrix}\right\} \mathrel{\substack{=\\<}} EI$$

wie aus der Determination leicht hervorgehet.

Endlich ist $EV'.\underline{GL' = PG}.GS$

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Fall 1. A. Zus. 2.).

Z u s.

Buchstäblich, wie A. Zus.

F a l l 4. (Fig. 28.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GD liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX′, GL′ die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL′ in V′ schneidende, gerade Linie EV′ ⋕ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{matrix} FX' : EV' \\ \left.\begin{matrix} FX'.GL' \\ \alpha^2 \end{matrix}\right\} : EV'.GL' \end{matrix}\right\} = FO : OE$$

also ist $EV'.GL'$ gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. IV. Fall 3. reducirt.

C o n s t r u c t i o n.

Buchstäblich, wie zu Fall 3.

B e w e i s.

Es ist $\underline{EV'.GL'} = PG.GS$ (Lib. I. Loc. IV. Fall 3. Bew.)

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Fall 1. A. Zus. 2.).

Z u s.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf

dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie CD in L so, dafs, wenn die, die Linien EV, FA in V, X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird,

$$EV.GL = PG.GS \text{ (Lib. I. Loc. IV. Fall 3. Zus. 2.)}$$

---

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Fall 1. A. Bew.)
mithin ist eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FA, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 2. ist.

Fall 5. (Fig. 29. a. b.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

Analysis.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV # AB gezogen, so ist

$$\begin{aligned} FX : EV &= FO : OE \\ FX.GL : EV.GL &= FO : OE \\ \alpha^2 : EV.GL &= FO : OE \end{aligned}$$

also ist EV.GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib I. Loc. IV. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Fall. 1.

Determination.

Vermöge Lib. I. Loc. IV. Fall 4. mufs seyn

$$PG.GS \geqq OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

$$\begin{aligned} \text{also } PU.UW : PG.GS \\ UP : PG \\ FK : KI \\ FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) : KI(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) \end{aligned} \Bigg\}$$

$$\overline{\overline{<}}\alpha^2 : OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

folglich $FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})\overline{\overline{<}}\alpha^2$.

B e w e i s.

Es ist $FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})\overline{\overline{<}}\alpha^2$

also $PG.GS \overline{\overline{>}} OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$

wie aus der Determination leicht hervorgehet; also berührt (Fig. 29. a.), oder schneidet (Fig. 29. b.) der Kreis die Linie MN, so dafs

$EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. IV. Fall. 4. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Fall 1. A. Bew.).

Z u s.

Der zweite Durchschnitt R′ des Kreises mit der Linie MN bestimmt auf denselben Linien zwey andere Segmente FX′, GL′ mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet.

2) *Der Punkt G liege auf ID,* (Fig. 30—47.) (Loc. II—VI.) *und zwar, wenn H den Durchschnitt der Linie CD mit der durch O der AB parallel gezogenen geraden Linie OH bezeichnet,*

A.) *in H.* (Fig. 30—33.). (Loc. II.)

F a l l 1. (Fig. 30.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade

Linie OF, und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV $\#$ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FX:EV \\ \left.\begin{array}{c} FX.GL \\ \alpha^2 \end{array}\right\}:EV.GL \end{array}\right\} = FO:OE$$

also ist EV. GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. V. Fall 1. reducirt.

Construction.

Man ziehe die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF, OH $\#$ AB $\#$ EV, OK $\#$ CD $\#$ FU, mache $QU = \alpha = UT$, QW $\#$ OT, WS $\#$ AB, SL=HE, und ziehe die, die Linie AB in X schneidende, gerade Linie OL, so sind FX,GL die gesuchten Segmente.

Determination.

Vermöge Lib. I. Loc. V. Fall 1. Det. muſs, damit der Punkt L auf die Verlängerung von IG falle, seyn

$$OH.HE < OG.GS$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Da } HE:GS \\ OH.HE:OG.GS \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} HE:UW \\ \left.\begin{array}{c} FK.HE \\ KI.IG \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c} OU.UW \\ \alpha^2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

so muſs $KI.IG < \alpha^2$ seyn.

Beweis.

Es ist $\alpha^2 > KI.IG$

also $OH.HE < OG.GS$

wie aus der Determ. hervorgehet, folglich liegt der Punkt L auf der Verlängerung von IG (Lib. I. Loc. V. Fall. 1. Bew.).

$$\text{Ferner ist } EV.GL = \left\{ \begin{array}{l} OH.EL \text{ (l. c.)} \\ OH.HS \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{also } \alpha^2 : EV.GL &= OU.UW : OH.HS \\ &= UO : OH \\ &= FO : OE \\ &= FX : EV \\ &= FX.GL : EV.GL \end{aligned}$$

$$\text{folglich } \alpha^2 = FX.GL.$$

F a l l 2. (Fig. 31.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GC liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV ⋕ AB gezogen, so ist

$$\left. \begin{array}{r} FX : EV \\ \left. \begin{array}{r} FX.GL \\ \alpha^2 \end{array} \right\} : EV.GL \end{array} \right\} = FO : OE$$

also ist EV.GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. V. Fall 2. reducirt.

C o n s t r u c t i o n.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

D e t e r m i n a t i o n.

Verm. Lib. I. Loc. V. Fall 2. mufs, damit L zwischen H, E falle, seyn $OH.HE > OH.HS$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Da } HE:GS\\ OH.HE:OG.GS\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}HE:UW\\ \left.\left\{\begin{array}{c}FR.HE\\ KI.IG\end{array}\right\}:\left\{\begin{array}{c}OU.UW\\ \alpha^2\end{array}\right\}\right.\end{array}\right.$$

---

so mufs $KI.IG > \alpha^2$ seyn.

B e w e i s.

Es ist $\alpha^2 < KI.IG$

also $OH.HE < OH.\overline{HS}$

wie aus der Det. hervorgehet, folglich fällt der Punkt L auf die Linie HE (Lib. I. Loc. V. Fall 2. Bew.)

Ferner ist $EV.GL = OH.EL$ (l. c.)

---

also $FX.GL = \alpha^2$ (buchst. wie Fall 1. Bew.)

F a l l 3. (Fig. 32.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, IG liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV $\#$ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r}FX:EV\\ \left.\begin{array}{c}FX.GL\\ \alpha^2\end{array}\right\}:EV.GL\end{array}\right\}=FO:OE$$

also ist EV.GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. V. Fall 3. reducirt.

C o n s t r u c t i o n.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt L zwischen E, I liege, muſs seyn

$$LG \leqq GI$$

$$\text{also}\ \left.\begin{matrix} SG \\ UW \end{matrix}\right\} \leqq \left\{\begin{matrix} GI - \left\{\begin{matrix} LS \\ GE \end{matrix}\right. \\ IE \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich}\ \left.\begin{matrix} OU.\,UW \\ \alpha^2 \end{matrix}\right\} \leqq \left\{\begin{matrix} FK.\,EI \\ FI.\,IG. \end{matrix}\right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist}\ \left.\begin{matrix} \alpha^2 \\ OU.\,UW \end{matrix}\right\} \leqq \left\{\begin{matrix} FI.\,IG \\ FK.\,EI \end{matrix}\right.$$

$$\text{also}\ \left.\begin{matrix} UW \\ SG \end{matrix}\right\} \leqq \left\{\begin{matrix} EI \\ IG - \left\{\begin{matrix} GE \\ LS \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich}\ \left.\begin{matrix} LS + SG \\ GL \end{matrix}\right\} \leqq GI$$

mithin fällt der Punkt L zwischen E, I.

Ferner ist $EV.\,GL = OH.\,EL$ (Lib. Loc. V. Fall 3. Bew.)

also $FX.\,GL = \alpha^2$ (wie Fall. 1. Bew.).

Fall 4. (Fig. 33.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GC liegen.

Anal. Constr.

Buchstäblich, wie zu Fall 3.

Determination.

Damit der Punkt L auf die Linie IC falle, muſs seyn

$$\begin{array}{lll} & LG & \geqq GI \\ LS & +SG & \\ EG & & \end{array}$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} SG \\ UW \end{array}\right\} \geqq \left\{\begin{array}{l} IG-GE \\ IE \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{r} OU.UW \\ \alpha^2 \end{array}\right\} \geqq \left\{\begin{array}{l} FK.IE \\ FI.IG. \end{array}\right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \alpha^2 \geqq FI.IG$$

$$\text{also } LG \geqq GI$$

wie aus der Determ. leicht hervorgehet, folglich liegt der Punkt L auf der Linie IC.

Ferner ist $EV.GL = OH.EL$ (Lib. I. Loc. V. Fall 3. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Fall 1. Bew.).

B.) *Der Punkt G liege auf der Verlängerung von IH.* (Fig. 34—36.). (Loc. III.)

Fall 1. (Fig. 34.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

Analysis.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV ⧣ AB gezogen, so ist

$$\begin{array}{l} \qquad FX:EV \\ \left.\begin{array}{r} FX.GL \\ \alpha^2 \end{array}\right\} : EV.GL \end{array} \Bigg\} = FO:OE$$

also ist EV. GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. VII. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

Beweis.

Es ist EV. GL = PG. GS (Lib. I. Loc. VII. Fall 1. Bew.)

$$\text{also } \left.\begin{matrix}PU.UW\\ \alpha^2\end{matrix}\right\} : EV.GL = PU.UW : PG.GS$$
$$= UP : PG$$
$$= FO : OE$$
$$= FX : EV$$
$$= FX.GL : EV.GL$$

folglich FX. GL = α^2.

Zus.

Verm. Lib. I. Loc. VII. Fall 1. Zus. 2. schneidet ein, in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN auf dieser Linie errichtetes, Perpendikel die Linie EH in dem Punkte L′ so, dafs, wenn die Durchschnittspunkte mit den Linien EV, FB mit V′, X′ bezeichnet werden,

$$EV'.GL' = PG.GS$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}PU.UW\\ \alpha^2\end{matrix}\right\} : EV'.GL' = PU.UW : PG.GS$$
$$= UP : PG$$
$$= FO : OE$$
$$= FX : EV'$$
$$= FX'.GL' : EV'.GL'$$

folglich FX′. GL′ = α^2.

mithin ist eine Linie OL′ gefunden, welche von den Linien FB, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 3. ist.

Fall 2. (Fig. 35.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GH liegen.

Analysis.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV $\#$ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{l} FX : EV \\ \left.\begin{array}{l} FX.GL \\ \alpha^2 \end{array}\right\} : EV.GL \end{array}\right\} = FO : OE$$

also ist EV.GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. II. Loc. VII. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

Beweis.

Es ist $\underline{EV.GL = PG.GS}$ (Lib. I. Loc. VII. Fall 2. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Fall 1. Bew.).

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie EC in einem Punkte L′ so, daſs, wenn die, die Linien EV, AB in V′, X′ schneidende, gerade Linie GL′ gezogen

wird, $EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VII. Fall 2. Zus. 2.)

also $FX.'GL' = \alpha^2$ (wie Fall 1. Zus.)
und es liegt der Punkt L' auf der Verlängerung der Linie EI, oder in I, oder zwischen den Punkten E, I,

$$\text{je nachdem } L'\beta - \beta E \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} EI, \text{ wenn } E\beta = \beta S;$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} L'\beta^2 \\ E\beta^2 + GS.EH \end{matrix}\right\} \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} \left\{\begin{matrix} (IE+E\beta)^2 \\ IE^2 + \left\{\begin{matrix} 2IE.E\beta \\ (EG-GS)IE \end{matrix}\right\} + E\beta^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} GS.(EH+EI) \\ GS.HI \end{matrix}\right\} \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} \left\{\begin{matrix} IE(IE+EG) \\ EI.IG \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} HI:IE \\ OF:FE \\ KF:FI \\ IG.KF:FI.IG \end{matrix}\right\} \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} \left\{\begin{matrix} IG:GS \\ IG.FK : \left\{\begin{matrix} GS.FK \\ PU.UW \\ \alpha^2 \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } FI.IG \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \alpha^2$$

demnach ist auch eine Linie OL' gefunden, welche von den Linien FA, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 5. oder Fall 4. ist.

Fall 3. (Fig. 34.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GE liegen.

Analysis.

Es seyen FX', GL' die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL' in V' schnei-

dende, gerade Linie EV′ ⫲ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FX':EV' \\ FX'.GL' : EV'.GL' \end{array}\right\} = FO:OE$$

$$\underbrace{FX'.GL'}_{\alpha^2}$$

also ist EV′. GL′ gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. VII. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 3.

Beweis.

Es ist $EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VII. Fall 3. Bew.)

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Fall 1. Zus.).

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie GD in dem Punkte L so, daſs, wenn die, die Linien EV′, AB in V, X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird,

$EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VII. Fall 3. Zus. 2.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Fall 1. Bew.)

mithin ist eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FA, GD Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 4. (Fig. 36.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, GC liegen.

Analysis.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es

seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF, und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV ♯ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FX:EV \\ \left.\begin{array}{c} FX.GL \\ \alpha^2 \end{array}\right\} : EV.GL \end{array}\right\} = FO:OE$$

also ist EV. GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. VII. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt L zwischen E, I liege, mufs seyn

$$\left.\begin{array}{r} LE \\ L\beta - \beta E \end{array}\right\} \leqq EI, \text{ wenn } E\beta = \beta S;$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} L\beta^2 \\ E\beta^2 + GS.EH \end{array}\right\} \leqq \left\{\begin{array}{l} (IE+E\beta)^2 \\ IE^2 + \left\{\begin{array}{c} 2IE.E\beta \\ IE(EG\text{-}GS) \end{array}\right\} + E\beta^2 \end{array}\right.$$

$$\text{folgl. } \left.\begin{array}{r} GS\,(HE+EI) \\ GS.HI \end{array}\right\} \leqq \left\{\begin{array}{l} IE(IE+EG) \\ FI.IG \end{array}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{r} HI:IE \\ OF:FE \\ KF:FI \\ IG.KF:FI.IG \end{array}\right\} \leqq \left\{\begin{array}{l} IG:GS \\ IG.KF: \left\{\begin{array}{l} GS.KF \\ PU.UW \\ \alpha^2. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{somit } FI.IG \geqq \alpha^2$$

Beweis.

$$\text{Es ist } FI.IG \geqq \alpha^2 \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } LE \leqq EI$$

wie aus der Det. leicht hervorgehet, folglich liegt der Punkt L zwischen E, I.

Ferner ist $\underline{EV.GL = PG.GS}$ (Lib. I. Loc. VII. Fall 4. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Fall 1. Bew.).

Z u s.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie GE in dem Punkte L' so, dafs, wenn die, die Linien EV, AB in V', X' schneidende, gerade Linie OL' gezogen wird,

$\underline{EV'.GL' = PG.GS}$ (Lib. I. Loc. VII. Fall 4. Zus. 2.)

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Fall 1. Zus.)

mithin ist eine Linie OL' gefunden, welche von den Linien FA, GH Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 2. ist.

F a l l 5. (Fig. 35.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GC liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX', FL' die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL' in V' schneidende, gerade Linie EV' ♯ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FX':EV' \\ \left.\begin{array}{c} FX'.GL' \\ \alpha^2 \end{array}\right\} : EV'.GL' \end{array}\right\} = FO:OE$$

also ist EV'.GL' gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. VII. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 3.

Determination.

Damit der Punkt L' auf IC falle, mufs seyn

$$\left.\begin{array}{l} L'E \\ L'\beta - \beta E \end{array}\right\} \geqq EI \qquad \text{wenn } E\beta = \beta S;$$

$$\text{also } FI.IG \leqq \alpha^2 \text{ (wie Fall 2. Zus.).}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } FI.IG \leqq \alpha^2 \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } L'E \geqq EI$$

wie aus der Det. leicht hervorgehet, also liegt L' auf IC.

$$\text{Ferner ist } EV'.GL' = PG.GS \text{ (Lib. II. Loc. VII. Fall 4.)}$$

$$\text{mithin } FX'.GL' = \alpha^2 \text{ (wie Fall 1. Zus.)}$$

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie GE in dem Punkte L so, dafs, wenn die, die Linien EV, AB in V, X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird,

$$EV.GL = PG.GS \text{ (Lib. I. Loc. VII. Fall 4. Zus. 2.)}$$

$$\text{also } FX.GL = \alpha^2 \text{ (wie Fall 1. Zus.)}$$

mithin ist eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FA, GH Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 2. ist.

C.) *Der Punkt G liege auf der Linie IH* (Fig. 37—48). (Loc. IV—VI.). *Bezeichnet man den Durchschnitt der Linien OF, CD mit E, so liege der Punkt G*

a.) *auf der Linie HE* (Fig. 37—40.). (Loc. IV.)

Fall 1. (Fig. 37. a. b.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

Analysis.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF, und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV ⋕ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FX : EV \\ FX.GL : EV.GL \end{array}\right\} = FO : OE$$

$$\left.\begin{array}{c} FX.GL \\ \alpha^2 \end{array}\right\}$$

also ist EV. GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. VI. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

Det. Bew. Zus.

Buchstäblich, wie Lib. II. Loc. I. Fall 5. mit Beziehung auf Lib. I. Loc. VI. Fall 1.

Fall 2. (Fig. 38.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GH liegen.

Analysis.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, ge-

rade Linie OF und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV $\#$ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r} \text{FX}:\text{EV} \\ \left.\begin{array}{c}\text{FX. GL}\\ \alpha^2\end{array}\right\} : \text{EV. GL} \end{array}\right\} = \text{FO}:\text{OE}$$

also ist EV.GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. VI. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

Beweis.

Es ist EV.GL = PG.GS (Lib. I. Loc. VI. Fall 2. Bew.)

also FX.GL = α^2 (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie EC in L′ so, daſs, wenn die, die Linien AB, EV in X′, V′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird,

EV′.GL′ = PG.GS (Lib. I. Loc. VI. Fall 2. Zus. 2.)

also FX.′GL′ = α^2 (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.)

und es liegt der Punkt L′ auf der Verlängerung der Linie EI, oder in I, oder zwischen den Punkten E, I,

je nachdem $E\beta + \beta L' \gtreqless EI$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}\beta L'^2\\ E\beta^2+EH.GS\end{matrix}\right\} \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} \left\{\begin{matrix}(IE-E\beta)^2\\ IE^2-\left\{\begin{matrix}2IE.E\beta\\ IE(SG-GE)\end{matrix}\right\}+E\beta^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}(HE+EI)GS\\ HI.GS\end{matrix}\right\} \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} \left\{\begin{matrix}IE(IE+EG)\\ EI.IG\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix}HI:IE\\ KF:FI\\ KF.IG:FI.IG\end{matrix}\right\} \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} \left\{\begin{matrix}IG:GS\\ FK.IG:\left\{\begin{matrix}GS.FK\\ \alpha^2\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$$

$$\text{demnach } FI.IG \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix} \alpha^2.$$

Es ist also auch eine Linie OL′ gefunden, welche von den Linien FA, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 5. oder Fall 4. ist.

Fall 3. (Fig. 39.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GE liegen.

Analysis.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV ⋕ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{matrix} & FX:EV\\ \left.\begin{matrix}FX.GL\\ \alpha^2\end{matrix}\right\} & :EV.GL\end{matrix}\right\} = FO:OE$$

also ist EV. GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. VI. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

Determination.

Vermöge Lib. I. Loc. VI. Fall 3. muſs seyn
$PG.GS \overline{\overline{<}} OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

also $FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE}) \overline{\overline{>}} \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. I. Fall 1. Det.).

Beweis.

Es ist $FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE}) \overline{\overline{>}} \alpha^2$ (Det.)

also $PG.GS \overline{\overline{<}} OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$ (wie Lib. II. Loc. I. Fall 1. A. Bew.)
folglich berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN, so daſs $EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VI. Fall. 3. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Zus.

Der zweite Durchschnitt R′ bestimmt, wie leicht aus Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Zus. 2. erhellet, auf denselben Linien zwey andere Segmente mit der gegebenen Eigenschaft.

Fall 4. (Fig. 40.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, GC liegen.

Analysis.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF, und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV ‡ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{matrix} FX:EV \\ \left.\begin{matrix} FX.GL \\ \alpha^2 \end{matrix}\right\}:EV.GL \end{matrix}\right\} = FO:OE$$

also ist EV. GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. VI. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt L zwischen E, I liege, muſs seyn

$$\left.\begin{matrix} EL \\ E\beta+\beta L \end{matrix}\right\} \overline{\gtrless} EI \qquad \text{wenn } E\beta=\beta S;$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} \beta L^2 \\ \beta E^2+EH.GS \end{matrix}\right\} \overline{\gtrless} \left\{\begin{matrix} (IE-E\beta)^2 \\ IE^2-\left\{\begin{matrix} 2IE.E\beta \\ IE(SG-GE) \end{matrix}\right\}+E\beta^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{folgl. } \left.\begin{matrix} (HE+EI)\, GS \\ HI.GS \end{matrix}\right\} \overline{\gtrless} \left\{\begin{matrix} IE(IE+EG) \\ FI.IG \end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} HI:IE \\ KF:FI \\ KF.IG:FI.IG \end{matrix}\right\} \overline{\gtrless} \left\{\begin{matrix} IG:GS \\ KF.IG:\left\{\begin{matrix} FK.GS \\ \alpha^2 \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } FI.IG \overline{\gtrless} \alpha^2.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } FI.IG \overline{\gtrless} \alpha^2 \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } LE \overline{\lessgtr} EI$$

wie aus der Det. leicht hervorgehet, folglich liegt der Punkt L zwischen I, E.

Ferner ist EV. GL = PG. GS (Lib. I. Loc. VI. Fall 4. Bew.)

also FX. GL = α^2 (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie GH in L' so, daſs, wenn die, die Linien EV, AB in V', X' schneidende, gerade Linie OL' gezogen wird,

EV'. GL' = PG. GS (Lib. I. Loc. VI. Fall 4. Zus. 2.)

also FX'. GL' = α^2 (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus.)

mithin ist eine Linie OL' gefunden, welche von den Linien FB, GD Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 2. ist.

Fall 5. (Fig. 38.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GC liegen.

Analysis.

Es seyen FX', GL' die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL' in V' schneidende, gerade Linie EV' ‡ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{matrix} FX' : EV' \\ FX'.\,GL' : EV'.\,GL' \end{matrix}\right\} = FO : OE$$

$$FX'.\,GL' = \alpha^2$$

also ist EV'. GL' gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. VI. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt L′ auf IC falle, mufs seyn

$$\left.\begin{matrix} EL' \\ E\beta + \beta L' \end{matrix}\right\} \overline{>} EI \quad \text{wenn } E\beta = \beta S;$$

also $FI.IG \overline{<} \alpha^2$ (wie aus Fall 4. Det. erhellet.)

Beweis.

Es ist $FI.IG \overline{<} \alpha^2$ (Det.)

also $E\beta + \beta L' \overline{>} EI$

wie aus der Det. leicht hervorgehet, mithin liegt der Punkt L′ auf der Linie IC.

Ferner ist $EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VI. Fall 4. Bew.)

folglich $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus.).

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie GH in L so, dafs, wenn die, die Linien EV, AB in V, X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird,

$EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VI. Fall 4. Zus. 2.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus.)

mithin ist eine Linie OL gefunden, welche von den

Linien FB, GD Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 2. ist.

b.) *Der Punkt G liege auf der Linie EI.* (Fig. 41—44.). (Loc. V.).

Fall 1. (Fig. 41.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GC liegen.

Analysis.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 2.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt L auf der Linie IC liege, mufs seyn

$$\left.\begin{matrix} EL \\ E\beta+\beta L \end{matrix}\right\} \geqq EI \text{, wenn } E\beta=\beta S;$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} \beta L^2 \\ \beta E^2+EH.GS \end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix} (IE-E\beta)^2 \\ IE^2-\left\{\begin{matrix} 2IE.E\beta \\ IE(SG+GE) \end{matrix}\right\}+\beta E^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} GS(HE+EI) \\ GS.HI \end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix} IE(IE-EG) \\ EI.IG \end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} HI:IE \\ KI:FI \\ KF.IG:FI.IG \end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix} IG:GS \\ FK.IG: \left\{\begin{matrix} FK.GS \\ \alpha^2 \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } FI.IG \leqq \alpha^2.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } FI.IG \leqq \alpha^2 \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } EL \geqq EI$$

wie aus der Determ. leicht hervorgehet, folglich liegt der Punkt L auf der Linie IC.

Ferner ist $EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. IV. Fall 1. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Z u s.

Buchstäblich, wie Lib. II. Loc. I. Fall 2. Zus.

F a l l 2. (Fig. 42.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, GI liegen.

A n a l y s i s.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 2.

C o n s t r u c t i o n.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I Fall 1.

D e t e r m i n a t i o n.

Damit der Punkt L auf der Linie GI liege, mufs seyn

$$\left.\begin{array}{r} EL \\ E\beta+\beta L \end{array}\right\} \stackrel{=}{<} EI \qquad \text{wenn } E\beta=\beta S;$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} \beta L^2 \\ \beta E^2+EH.GS \end{array}\right\} \stackrel{=}{<} \left\{\begin{array}{l} (IE-E\beta)^2 \\ IE^2-\left\{\begin{array}{l} 2IE.E\beta \\ IE(SG+GE) \end{array}\right\}+E\beta^2 \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{r} SG(HE+EI) \\ GS.HI \end{array}\right\} \stackrel{=}{<} \left\{\begin{array}{l} IE(IE-EG) \\ EI.IG \end{array}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{r} HI:IE \\ KF:FI \\ KF.IG:FI.IG \end{array}\right\} \stackrel{=}{<} \left\{\begin{array}{l} IG:GS \\ KF.IG:\left\{\begin{array}{l} KF.GS \\ \alpha^2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{somit } FI.IG \stackrel{=}{>} \alpha^2.$$

Beweis.

Es ist FI. IG $\overline{\overline{>}}$ α^2

also EL $\overline{\overline{<}}$ EI

wie aus der Determ. hervorgehet, folglich liegt der Punkt L auf der Linie GI.

Ferner ist EV. GL = PG. GS (Lib. I. Loc. IV. Fall 1. Bew.)

folglich FX. GL = α^2 (buchst. wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Zus.

Buchstäblich, wie Lib. II. Loc. I. Fall 2. Zus.

Fall 3. (Fig. 43.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, GE liegen.

Anal. Gonstr.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

Determination.

Buchstäblich, wie Lib. II. Loc. I. Fall 1. A. Det.

Beweis.

Es ist FK(GH+HE−2$\sqrt{GH.HE}$) $\overline{\overline{>}}$ α^2

also PG. GS $\overline{\overline{<}}$ OH(GH+HE−2$\sqrt{GH.HE}$)

folgl. berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN.

Ferner ist EV. GL = PG. GS (Lib. I. Loc. IV. Fall 2. Bew.)

also FX. GL = α^2 (wie Lib. II. Loc. III. Fall. 1. Bew.).

Zus.

Der zweite Durchschnitt R' des Kreises und der Linie MN bestimmt eine zweite Linie OL' mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet.

Fall 4. (Fig. 41.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GH liegen.

Anal. Constr. Bew.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 4.

Zus.

Der zweite Durchschnitt R bestimmt, wie Lib. II. Loc. I. Fall 4. Zus., auf den Linien FA, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft. Und es liegt der Punkt L auf der Verlängerung von EI, oder in I, oder zwischen E, I,

je nachdem $EL \gtreqless EI$

---

also $FI.IG \lesseqgtr \alpha^2$ (wie aus Fall 1. 2. Determ. erhellet.)

Es ist mithin eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FA, GC, oder FI, IG Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 1. oder Fall 2. ist.

Fall 5. (Fig. 44.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

Anal. Constr. Det. Bew. Zus.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 5.

c.) *Der Punkt G liege in dem Punkte E.* (Fig. 45—47.). (Loc. VI.)

F a l l 1. (Fig. 45.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GC liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV ⌗ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FX : EV \\ \left.\begin{array}{r} FX.GL \\ \alpha^2 \end{array}\right\} : EV.GL \end{array}\right\} = FO : OE$$

also ist EV. GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. III. Fall 1. reducirt.

C o n s t r u c t i o n.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall. 1.

D e t e r m i n a t i o n.

Damit der Punkt L auf IC falle, mufs seyn

$$E\beta + \beta L \overset{=}{>} EI, \text{ wenn } E\beta = \beta S;$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{also } \beta L^2 \\ E\beta^2 + HE.GS \end{array}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{array}{l} (IE - E\beta)^2 \\ IE^2 - \left\{\begin{array}{l} 2IE.E\beta \\ IE.GS \end{array}\right\} + E\beta^2 \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } HI.GS \overset{=}{>} IE^2$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{mithin } HI : IE \\ KF : FI \\ KF.IG : FI.IG \end{array}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{array}{l} IE : GS \\ KF.IG : \left\{\begin{array}{l} GS.KF \\ \alpha^2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{somit } FI.IG \overset{=}{<} \alpha^2.$$

Beweis.

Es ist $FI.IG \overline{\gtrless} \alpha^2$ (Det.)

---

also $EL \overline{\gtrless} EI$

wie aus der Det. leicht hervorgehet, mithin liegt der Punkt L auf der Linie IC.

Ferner ist $EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. III. Fall. 1.)

---

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie EH in L′ so, dafs, wenn die, die Linien EH, AB in V′, X′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird,

$EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.)

---

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.)

folglich ist eine Linie OL′ gefunden, welche von den Linien FB, GD Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 3. ist.

Fall 2. (Fig. 46.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, IG liegen.

Anal. Contsr.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt L auf der Linie GI liege,

mufs seyn $E\beta + \beta L \overline{\overline{<}} EI$, wenn $E\beta = \beta S$;

also $FI.IG \overline{\overline{>}} \alpha^2$ (wie aus Fall 1. Determ. leicht erhellet.).

B e w e i s.

Es ist $FI.IG \overline{\overline{>}} \alpha^2$ (Det.)

also $EL \overline{\overline{<}} EI$

wie aus der Det. leicht hervorgehet, also liegt der Punkt L auf GI.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Ferner ist } EV.GL = PG.GS \\ \hline \text{folglich } FX.GL = \alpha^2. \end{array}\right\} \text{wie zu Fall 1.}$$

Z u s.

Buchstäblich, wie Fall 1. Zus.

F a l l 3. (Fig. 46.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GH liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX′, GL′ die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL′ in V′ schneidende, gerade Linie EV′ ⧣ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FX' : EV' \\ \left.\begin{array}{r} FX'.GL' \\ \alpha^2 \end{array}\right\} : EV'.GL' \end{array}\right\} = FO : OE$$

also ist $EV'.GL'$ gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. III. Fall 2. reducirt.

C o n s t r u c t i o n.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 3.

B e w e i s.

Es ist $\frac{EV'. GL' = PG. GS}{}$ (Lib. I. Loc. III. Fall 2. Bew.)

also $FX'. GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus.).

Z u s.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie EC in einem Punkte L so, daſs, wenn die, die Linien EV, AB in V, X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird, $\frac{EV. GL = PG. GS}{}$ (Lib. I. Loc. III. Fall 2. Zus. 2.)

also $FX. GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.)
Und es liegt der Punkt L auf der Verlängerung der Linie EI, oder in I, oder zwischen I, G,

je nachdem $E\beta + \beta L \gtreqless EI$, wenn $E\beta = \beta S$;

$$\overline{\text{also } FI. IG \lesseqgtr \alpha^2}$$

wie aus der Determination von Fall 1. 2. erhellet. Es ist mithin eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FA, GC, oder FI, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 1. oder Fall 2. ist.

F a l l 4. (Fig. 47.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX, GL die gesuchten Segmente; es

seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL in V schneidende, gerade Linie EV ⫲ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FX:EV \\ \left.\begin{array}{c} FX.GL \\ \alpha^2 \end{array}\right\} : EV.\,GL \end{array}\right\} = FO:OE$$

also ist EV. GL gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. II. Loc. III. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

Determination.

Damit der Kreis der Linie MN begegne, muſs verm. Lib. I. Loc. III. Fall 3. Det. seyn

$$4OH.\,HG \overline{\underline{<}}\; PG.\,GS$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{c} PU.UW \\ \alpha^2 \end{array}\right\} : 4OH.\,HG \overline{\underline{>}} \left\{\begin{array}{r} PU.\,UW : PG.\,GS \\ UP : PG \\ FK : KI \\ 4HG.\,FK : 4HG.\,KI \end{array}\right.$$

$$\text{folglich } \alpha^2 \overline{\underline{>}} \left\{\begin{array}{l} 4GH.\,FK \\ 4KI.\,IH. \end{array}\right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \alpha^2 \overline{\underline{>}}\; 4KI.\,IH$$

$$\text{also } 4OH.\,HG \overline{\underline{<}}\; PG.\,GS$$

wie aus der Det. leicht hervorgehet, folglich erreicht der Kreis die Linie MN, so daſs

EV.GL = PG.GS (Lib. I. Loc. III. Fall 3. Bew.)

also FX.GL = a^2 (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Z u s.

Der zweite Durchschnittspunkt R′ bestimmt (vermöge Lib. I. Loc. III. Fall 3. Zus. 2.) zwey Segmente FL′, GX′ auf denselben Linien mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet.

II.) *Der Punkt F liege auf der Linie IA* (s. Seite 49.) (Fig. 48—69.). (Loc. VII—XIV.). *Zieht man durch O die, die Linie AB in K schneidende gerade Linie OK* ‡ *CD, so liege der Punkt F*

1.) *in K.* (Fig. 48—55.). (Loc. VII.—IX.) *Der Punkt G liege*

A.) *auf der Linie IC.*
Ist erlediget durch. Lib. II. Loc. II.

B.) *auf der Linie ID.* (Fig. 48—55.). (Loc. VII—IX.). *Bezeichnet man mit H den Durchschnitt der Linie CD mit einer durch O der Linie AB parallel gezogenen geraden Linie OH, so liege der Punkt G*

a.) *in H* (Fig. 48. a.). (Loc. VII.).

F a l l 1. (Fig. 48. a.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

A n a l y s i s.

Es sey OL die gesuchte Linie, so ist

$$\frac{OF : FX = LG : GO \text{ (El. VI. 4.)}}{\text{also } \left.\begin{matrix} FX.\,GL \\ a^2 \end{matrix}\right\} = GO.\,OF}$$

folgl. ist die Aufgabe unmöglich, wenn $a^2 \gtrless GO.\,OF$, oder unbstimmt, wenn $a^2 = GO.OF$.

A n m.

Dasselbe gibt von den übrigen Fällen.

b.) *auf der Verlängerung der Linie III; oder, welches auf dasselbe hinauslauft, es liege F auf der Verlängerung von IK, G in H.* (Fig. 48. b.—51.) (Loc. VIII.)

F a l l 1. (Fig. 48. b.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, GC liegen.

A n a l. C o n s t r.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. II. Fall 1.

D e t e r m i n a t i o n.

Damit der Punkt L auf IC falle, muſs seyn

$$\frac{LG \geqq GI}{\text{also } SG \geqq EI}$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} FK.\,SG \\ a^2 \end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix} FK.\,EI \\ FI.\,IG. \end{matrix}\right.$$

B e w e i s.

$$\frac{\text{Es ist } a^2 \geqq FI.\,IG}{\text{also } a^2 > KI.\,IG}$$

Es ist aber
$$\left.\begin{array}{r}EH:GS\\ OH.\,HE:OG.\,GS\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}HE:UW\\ \left\{\begin{array}{c}FK.\,EH\\ KI.\,IG\end{array}\right\}:\left\{\begin{array}{c}OU.\,UW\\ \alpha^2\end{array}\right\}\end{array}\right.$$

folglich $OH.\,HE < OG.\,GS$

mithin $GE < EL$ (Lib. I. Loc. V. Fall 1. Bew.)

Auch ist
$$\left.\begin{array}{r}\alpha^2\\ FK.\,SG\end{array}\right\}\overline{\gtrless}\ FK.\,EI$$

folglich $SG \overline{\gtrless} EI$

mithin $LG \overline{\gtrless} GI$

demnach fällt der Punkt L auf IC.

Auch ist $EV.\,GL = OH.\,EL$ (Lib. I. Loc. V. Fall 1. Bew.)

also $FX.\,GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. II. Fall 1. Bew.)

F a l l 2. (Fig. 49.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GI liegen.

A n a l. C o n s t r.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. II. Fall 1.

D e t e r m i n a t i o n.

Verm. Lib. I. Loc. V. Fall 1. Det. mufs, damit $GE < EL$ werde, seyn $OH.\,HE < OG.\,GS$.

Es ist aber
$$\left.\begin{array}{r}HE:GS\\ OH.\,HE:OG.\,GS\end{array}\right\}=\begin{array}{l}HE:UW\\ \left\{\begin{array}{c}FK.\,EH\\ KI.\,IG\end{array}\right\}:\left\{\begin{array}{c}OU.\,UW\\ \alpha^2\end{array}\right\}\end{array}$$

also mufs $KI.\,IG < \alpha^2$ seyn.

Damit der Punkt L nicht auf die Verlängerung von GI falle, mufs seyn $LG \leqq GI$

---

also $SG \leqq EI$

$$\text{folglich}\ \left.\begin{array}{r} FK.SG \\ \alpha^2 \end{array}\right\} \leqq \left\{\begin{array}{l} FK.EI \\ FI.IG. \end{array}\right.$$

B e w e i s.

Es ist sowohl $\alpha^2 > KI.IG$, als auch $\alpha^2 \leqq FI.IG$

---

also $GE < EL$, $LG \leqq GI$

wie aus der Det. leicht hervorgehet, folglich liegt der Punkt L zwischen G, I.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Auch ist } EV.GL = OH.EL \\ \hline \text{also } FX.GL = \alpha^2. \end{array}\right\} \text{wie zu Fall 1.}$$

F a l l 3. (Fig. 50.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GE liegen.

A n a l. C o n s t r.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. II. Fall 2.

D e t e r m i n a t i o n.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Da } HE:GS \\ OH.HE:OG.GS \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} HE:UW \\ \left.\begin{array}{l} FK.EH \\ KI.IG \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c} OU.UW \\ \alpha^2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

und $OH.HE > OG.GS$ (Lib. I. Loc. V. Fall 2. Det.)

---

so mufs $KI.IG > \alpha^2$ seyn.

B e w e i s.

Es ist $KI.IG > \alpha^2$

---

also $HE > HS$

folglich fällt L auf EG.

Auch ist $\overline{EV.GL} = OH.EL$ (Lib. I. Loc. V. Fall 2. Bew.)

mithin $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. II. Fall 1. Bew.)

F a l l 4. (Fig. 41.)

Die Segmente sollen auf den Linien FK, GD liegen.

A n a l. C o n s t r.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. II. Fall 3.

B e w e i s.

Es ist $\overline{EV.GL} = OH.EL$ (Lib. I. Loc. V. Fall 3. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. II. Fall 1. Bew.).

c.) *Der Punkt G liege auf der Linie HI. Oder, welches auf dasselbe hinauslauft, es liege der Punkt F auf der Linie KI, der Punkt G in H.* (Fig. 52—55.). (Loc. IX.).

F a l l 1. (Fig. 52.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

A n a l. C o n s t r.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. II. Fall 1.

D e t e r m i n a t i o n.

Da $\overline{HE:GS = HE:UW}$

also $OH.HE : OG.GS = \begin{cases} FK.EH : OU.UW \\ KI.IG : \alpha^2 \end{cases}$

und $\underline{OH.HE} < \underline{OG.GS}$ (Lib. I. Loc. V. Fall 1. Det.)

so mufs $KI.IG < \alpha^2$ seyn.

B e w e i s.

Es ist $\underline{KI.IG < \alpha^2}$ (Det.)

also $EH < EL$

welches aus der Det. leicht erhellet, folglich liegt der Punkt L auf HD.

Auch ist $\underline{EV.GL = OH.EL}$ (Lib. I. Loc. V. Fall 1. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. II. Fall 1. Bew.)

F a l l 2. (Fig. 53.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GI liegen.

A n a l. C o n s t r.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. II. Fall 2.

D e t e r m i n a t i o n.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Da } HE:GS\\ OH.HE:OG.GS\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}HE:UW\\ FK.HE:OU.UW\\ KI.IG:\alpha^2\end{array}\right.$$

und $\underline{OH.HE} > \underline{OG.GS}$ (Lib. I. Loc. V. Fall 2. Det.)

so mufs $KI.IG > \alpha^2$ seyn.

Damit der Punkt L auf IH falle, mufs seyn

$$\underline{LG \leqq GI}$$

$$\text{also } \underline{SG \geqq EI}$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} FK.SG \\ \alpha^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} FK.EI \\ FI.IG \end{matrix}\right.$$

Beweis.

Es ist sowohl $KI.IG > \alpha^2$, als auch $FI.IG \overset{=}{<} \alpha^2$ (Det.)

also $EH > EL$, $LG \overset{=}{<} GI$

welches aus der Det. leicht hervorgehet, also liegt L auf IG.

Ferner ist $EV.GL = OH.EL$ (Lib. I. Loc. V. Fall 2. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. II. Fall 1. Bew.).

Fall 3. (Fig. 54.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, GE liegen.

Anal. Constr.

Buchstäblich, wie zu Fall 2.

Determination.

Damit der Punkt L auf IE falle, mufs seyn

$$LG \overset{=}{>} GI$$

$$\text{also } SG \overset{=}{<} EI$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} FK.SG \\ \alpha^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix} FK.EI \\ FI.IG. \end{matrix}\right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix} HE:GS \\ OH.HE:OG.GS \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} HE:UW \\ FK.EH:OU.UW \\ KI.IG:\alpha^2 \end{matrix}\right.$$

Da $\alpha^2 \leqq FI . IG$

so ist $\alpha^2 < KI . IG$

also $OH . HE > OG . GS$

folglich $\left.\begin{matrix} HE \\ LS \end{matrix}\right\} > GS$

Ferner ist $FK . SG \leqq FK . EI$

also $SG \leqq EI$

folglich $LG \geqq GI$

mithin liegt der Punkt L auf EI.

Auch ist $EV . GL = OH . EL$ (Lib. I. Loc. V. Fall. 2. Bew.)

also $FX . GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. II. Fall 1. Bew.)

F a l l 3. (Fig. 55.)

Die Segmente sollen auf den Linien FK, GC liegen.

A n a l. C o n s t r.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. II. Fall. 3.

B e w e i s.

Es ist $EV . GL = OH . EL$ (Lib. I. Loc. V. Fall 3. Bew.)

also $FX . GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. II. Fall 1. Bew.).

2.) *Der Punkt F liege auf der Verlängerung von IK.* (s. Seite 98.). *Der Punkt G liege*

A.) *auf der Linie IC.*

Ist erlediget durch Lib. II. Loc. III.

B.) *auf der Linie ID* (Fig. 56—66.). (Loc. XI—XIV.), *und zwar, wenn OH ‡ AB gezogen wird,*

a.) *in H.*

Ist erlediget durch Lib. II. Loc. VIII.

b.) *auf der Linie HD.* (Fig. 56—66.) (Loc. XI—XIII.) *Bezeichnet man mit E den Durchschnitt der geraden Linie OF mit CD, so liege der Punkt G*

α.) *in E.* (Fig. 56. 57.). (Loc. XI.).

F a l l 1. (Fig. 56.)

Die Segmente sollen auf den Linien FK, GD liegen.

A n a l y s i s.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. VI. Fall 1.

C o n s t r u c t i o n.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

B e w e i s.

Es ist $\overline{EV.GL = PG.GS}$ (Lib. I. Loc. III. Fall. 1. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. A. Bew.).

Z u s.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie EH in einem Punkte L′ so, dafs, wenn die, die Linien AB, EV in X′, V′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird,

$EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.)

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.)

folglich ist eine Linie OL′ gefunden, welche von den Linien FA, GH Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 2. ist.

Fall 2. (Fig. 56.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GH liegen.

Anal. Constr. Bew.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. VI. Fall 3.

Zus.

Der zweite Durchschnitt R des Kreises und der Linie MN bestimmt zwey Segmente FX, GL auf den Linien FR, GL mit der gegebenen Eigenschaft, wie aus Lib. I. Loc. III. Fall 2. Zus. 2. erhellet, und welches Fall 1. ist.

Fall 3. (Fig. 57.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GI liegen.

Analysis.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. VI. Fall 4.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

1) Es sey $\alpha^2 \gtreqless 2FI.IH$.

Determination.

Buchstäblich, wie Lib. II. Loc. VI. Fall 4. Det.

Beweis.

Es ist $\alpha^2 \overset{=}{>} 4\text{HI}.\text{IR}$

also berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN, wie aus der Det. erhellet.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Da } \alpha^2 \\ \text{PU}.\text{UW}\end{array}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{array}{l}2\text{FI}.\text{IH} \\ 2\text{FK}.\text{EI}\end{array}\right.$$

$$\text{so ist } \left.\begin{array}{r}\text{UW} \\ 2\text{E}\beta\end{array}\right\} \overset{=}{<} 2\text{EI} \qquad \text{wenn } \text{E}\beta = \beta\text{S};$$

folglich $\text{E}\beta \overset{=}{<} \text{EI}$

demnach fällt der Punkt L auf HI.

Auch ist $\text{EV}.\text{GL} = \text{PG}.\text{GS}$ (Lib. I. Loc. III. Fall 3. Bew.)

also $\text{FX}.\text{GL} = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie HS in dem Punkte L′ so, daſs, wenn die, die Linien AB, EV in X′, V′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird,

$\text{EV}'.\text{GL}' = \text{PG}.\text{GS}$ (Lib. I. Loc. III. Fall 3. Zus. 2.)

also $\text{FX}.'\text{GL}' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.)

und es liegt der Punkt L′ auf der Verlängerung der Linie EI, oder in I, oder zwischen I, H, je nachdem

$$\left.\begin{array}{r}\text{EL}' \\ \text{E}\beta + \beta\text{L}'\end{array}\right\} \overset{>}{\underset{<}{=}} \text{EI}$$

$$\text{also} \left.\begin{matrix}\beta L'^2 \\ E\beta^2 - EH.GS\end{matrix}\right\} \gtrless \left\{\begin{matrix}(IE - E\beta)^2 \\ IE^2 - \left\{\begin{matrix}2IE.E\beta \\ IE.ES\end{matrix}\right\} + E\beta^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } HI.GS \geqq IE^2$$

$$\text{mithin} \left.\begin{matrix}HI:IE \\ KF:FI \\ IE.KF:FI.IG\end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix}IE:GS \\ IE.KF: \left\{\begin{matrix}KF.GS \\ \alpha^2\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } FI.IG \leqq \alpha^2.$$

Es ist also auch eine Linie OL′ gefunden, welche von den Linien FI, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 4. oder Fall 3. ist.

2.) Es sey $\alpha^2 > 2FI.III$.

a.) Es sey $FI \overline{\gtrless} 2KI$.

Beweis.

$$\text{Es ist } FI \overline{\gtrless} 2KI$$

$$\text{also } 2FI.IH \overline{\gtrless} 4KI.IH$$

$$\text{folglich } \alpha^2 > \left\{\begin{matrix}4KI.III \\ 4FK.EH\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \alpha^2 : 4PE.EH > \left\{\begin{matrix}4FK.EH : 4PE.EH \\ \left\{\begin{matrix}FK \\ UP\end{matrix}\right\} : PE \\ PU.UW : PE.GS\end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } 4PE.EH < PE.GS$$

folglich schneidet der Kreis die Linie MN (Lib. I. Loc. III. Fall 3. Bew.).

$$\text{Da } \left.\begin{matrix}\alpha^2\\ PU.UW\end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix}2FI.IH\\ 2FK.EI\end{matrix}\right.$$

$$\text{so ist } \left.\begin{matrix}UW\\ 2E\beta\end{matrix}\right\} > 2EI$$

$$\text{also } E\beta > EI$$

$$\text{Da } FI \geqq 2KI$$

$$\text{so ist } 2KF \geqq FI$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix}2OK\\ 2IH\end{matrix}\right\} \geqq IG$$

$$\text{folglich } 2FI.IH \geqq FI.IG$$

$$\text{mithin } \alpha^2 > FI.IG.$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix}IE.KF:\alpha^2\\ IE.KF:\left\{\begin{matrix}PU.UW\\ KF.ES\end{matrix}\right.\\ IE:ES\end{matrix}\right\} \leqq \left\{\begin{matrix}IE.KF:FI.IG\\ KF:FI\\ HI:IE\end{matrix}\right.$$

$$\text{also } EI^2 \leqq \left\{\begin{matrix}HI.ES\\ (IE-EH)ES\end{matrix}\right.$$

$$\text{folgl. } \left.\begin{matrix}E\beta^2\text{-}IE.ES+EI^2\\ (E\beta-EI)^2\end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix}E\beta^2-EH.ES\\ L\beta^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix}E\beta-\beta L\\ EL\end{matrix}\right\} \leqq EI$$

demnach fällt der Punkt L auf HI.

Auch ist $EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. III. Fall 3. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall. 1. Bew.).

Zus.

Der durch den zweiten Durchschnitt R′ bestimmte Punkt L′ liegt auf IC, und bestimmt auf den Linien FI, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet, und welches Fall 4. ist.

b.) Es sey $FI < 2KI$.

Determination.

Da $\alpha^2 > 2FI.IH$

so ist $EI < E\beta$ (wie a. Bew.)

Damit der Punkt L auf IH falle, muſs also seyn

$$E\beta - \beta L \leqq EI$$

$$\text{also } (E\beta - EI)^2 \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \leqq \left\{\begin{matrix} \beta L^2 \\ E\beta^2 - EH.GS \end{matrix}\right.$$

$$E\beta^2 - \left\{\begin{matrix} 2E\beta.EI \\ GS.EI \end{matrix}\right\} + EI^2$$

$$\text{folglich } EI^2 \leqq IH.GS$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} HI : IE \\ KF : FI \\ IE.KF : FI.IE \end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix} EI : GS \\ EI.KF : \left\{\begin{matrix} KF.GS \\ \alpha^2 \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } FI.IG \leqq \alpha^2$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix} FK : KI \\ K\gamma : KH \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} FO : OE \\ IH : HE \\ KH : HP \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } K\gamma + HP \;\overline{\overline{>}}\; 2KH$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{l} K\gamma + HP + 2KH \\ UI \end{array}\right\} \overline{\overline{>}}\; 4KH$$

$$\text{mithin } FI.IG \;\overline{\overline{>}}\; 4KI.IH$$

$$\text{Es ist } \alpha^2 \;\overline{\overline{>}}\; FI.IG$$

$$\text{somit } \alpha^2 \;\overline{\overline{>}}\; 4KI.IH$$

folglich berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN, (wie a. Bew.).

$$\text{Da } \alpha^2 \;\overline{\overline{>}}\; FI.IG$$

$$\text{so ist } E\beta - \beta L \;\overline{\overline{<}}\; EI$$

wie aus der Det. leicht hervorgehet, also liegt der Punkt L auf IH.

Auch ist $EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. III. Fall 3. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Z u s.

Der zweite Durchschnitt R′ bestimmt zwey Segmente FX′, GL′ auf den Linien FI, GC mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet, und welches Fall 4. ist.

F a l l 4. (Fig. 57.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, GC liegen.

A n a l. C o n t s r.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. VI. Fall 3. wenn daselbst Loc. III. Fall 3. statt Loc. III. Fall 2. gesetzt wird.

1.) Es sey $\alpha^2 > 2FI.IH$

a.) Es sey $FI \geqq 2KI$.

B e w e i s.

Es ist $FI \geqq 2KI$

also $2FI.IH \geqq 4KI.IH$

folglich $\alpha^2 \geqq 4KI.IH$

mithin berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN (wie Fall 3. 2. a. Bew.).

Da $\alpha^2 > 2FI.IH$

so ist $EI < E\beta$ (wie Fall 3. 2. a. Bew.)

also fällt der Punkt L auf IC.

Auch ist $EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. III. Fall 3. Zus. 2.)

folglich $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. II. Fall 1. Zus. 2.)

Z u s.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie HS in einem Punkte L so, dafs, wenn die, die Linien EV, AB in V, X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird,

$EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. III. Fall 3. Zus.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.)

Und es liegt der Punkt L zwischen H, I, oder in I, oder auf der Verlängerung von HI, je nachdem

$$\left.\begin{matrix} EL \\ E\beta - \beta L \end{matrix}\right\} \lesseqgtr EI$$

$$\text{also } (\beta E - EI)^2 \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} \begin{cases} \beta L^2 \\ E\beta^2 - EH.\,GS \end{cases}$$

$$\beta E^2 - \begin{Bmatrix} 2\beta E.\,EI \\ SG.\,EI \end{Bmatrix} + IE^2$$

$$\text{folglich } IE^2 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \begin{cases} GS(IE - EH) \\ GS.\,HI \end{cases}$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} HI : IE \\ KF : FI \\ IE.\,KF : FI.\,IE \end{matrix}\right\} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \begin{cases} IE : GS \\ EI.\,KF : \begin{cases} GS.\,KF \\ \alpha^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{somit } FI.\,IE \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \alpha^2.$$

Es ist also eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FB, GI, oder FI, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 3. oder Fall 4. ist.

b.) Es sey $FI < 2KI$.

Determination.

Buchstäblich, wie Lib. II. Loc. VI. Fall 3. Det.

Beweis.

$$\text{Es ist } \alpha^2 \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 4HI.\,IK$$

also berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN, wie aus der Det. hervorgehet.

$$\text{Da } FI < 2KI$$

$$\text{also } 2FI.\,IH < 4HI.\,IK$$

$$\text{so ist } \alpha^2 > 2FI.\,IH$$ (wie auch vorausgesetzt wird.)

folglich $EI < E\beta$ (wie Fall 3. 2. a. Bew.)

mithin fällt der Punkt L auf IC.

Auch ist $EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. III. Fall 3 Bew.)

somit $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus.).

Z u s.

Buchstäblich, wie zu a.

2) Es sey $\alpha^2 \leqq 2FI.IH.$

D e t e r m i n a t i o n.

Da $\alpha^2 \leqq 2FI.IH$

so ist $EI \geqq E\beta$ (wie Fall 3. 1. Bew.)

Damit also der Punkt L auf IC falle, mufs seyn

$E\beta + \beta L' \geqq EI$

also $FI.IG \leqq \alpha^2$ (wie Fall 3. 1. Zus.)

folglich $2FI.IH \geqq FI.IG$

mithin $2IH \geqq IG$,

somit $IH \geqq HG$.

B e w e i s.

Es ist $FK:KI = FO:OE$

also $FI.IG \geqq 4KI.IH$ (wie Fall 3. 2. b. Bew.)

folglich $\alpha^2 \geqq 4KI.IH$

mithin berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN.

$$\text{Da IH} \overset{=}{>} \text{HG}$$

$$\text{so ist EL}' \overset{=}{>} \text{EI}$$

wie aus der Determ. hervorgehet, also liegt der Punkt L' auf IC.

Auch ist $EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. III. Fall 3. Bew.)

mithin $FX'.GL' = \alpha^2$ (Lib. II. Loc. III. Fall. 1. Zus.)

Z u s.

Der zweite Durchschnitt R bestimmt zwey Segmente auf den Linien EB, GI mit der gegeben Eigenschaft, wie von selbst erhellet, und welches Fall 3. ist.

β.) Der Punkt G liege zwischen H, E. (Fig. 58-61.) (Loc. XII.).

F a l l 1. (Fig. 58.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, GC liegen.

A n a l y s i s.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. IV. Fall 1.

C o n s t r u c t i o n.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

1.) Es sey $HI \overset{=}{<} \sqrt{GH.HE}$.

D e t e r m i n a t i o n.

Verm. Lib. I. Loc. VI. Fall 1. Det. muſs seyn

$$PG.GS \overset{=}{>} OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{also } FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) \overset{=}{<} \alpha^2$$

Beweis.

Es ist $FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) \overset{=}{<} \alpha^2$

also berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN, wie aus der Det. erhellet.

$$\text{Da } HI \overset{=}{<} \sqrt{GH.HE}$$

$$\text{so ist } FK(GH+HE+2HI) \overset{=}{<} \begin{cases} \alpha^2 \\ FK.GS \end{cases}$$

$$\text{also } \begin{rcases} GH+HE+2HI \\ GI+IE \end{rcases} \overset{=}{<} GS$$

$$\text{folglich } 2EI \overset{=}{<} 2E\beta$$

$$\text{mithin } EI \overset{=}{<} E\beta$$

demnach fällt der Punkt L auf IC.

Auch ist $\underline{EV.GL = PG.GS}$ (Lib. I. Loc. VI. Fall 1. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.)

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R′ des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie HS in einem Punkte L′ so, daſs, wenn die, die Linien EV, AB in V′ X′ schneidende, gerade Linie OL′ gezogen wird, $\underline{EV'.GL' = PG.GS}$ (Lib. I. Loc. VI. Fall 1. Zus. 2.)

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.)

Und es liegt der Punkt L′ zwischen H, I, oder in I, oder auf der Verlängerung von HI, je nachdem

$$\left.\begin{matrix} EL' \\ E\beta-\beta L' \end{matrix}\right\} \lesseqgtr EI$$

$$\text{also } (E\beta-EI)^2 \lesseqgtr \left\{\begin{matrix} \beta L'^2 \\ E\beta^2-EH.GS \end{matrix}\right.$$

$$E\beta^2-\left\{\begin{matrix} 2\beta E.EI \\ (EG+GS)EI \end{matrix}\right\}+EI^2$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} EI(EI-EG) \\ EI.IG \end{matrix}\right\} \lesseqgtr \left\{\begin{matrix} (IE-EH)GS \\ HI.GS \end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} HI:IE \\ KF:FI \\ KF.IG:FI.IG \end{matrix}\right\} \gtreqless \left\{\begin{matrix} IG:GS \\ KF.GI: \left\{\begin{matrix} KF.GS \\ \alpha^2 \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } FI.IG \lesseqgtr \alpha^2.$$

Es ist also eine Linie OL' gefunden, welche von den Linien FB, GI, oder FI, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 2. oder Fall 1. ist.

2.) Es sey $HI > \sqrt{GH.HE}$.

a.) Es sey $\alpha^2 \geqq FK(EI+IG)$.

B e w e i s.

$$\text{Es ist } \alpha^2 \geqq \left\{\begin{matrix} FK(EI+IG) \text{ (hyp.)} \\ FK(EH+HI+GH+HI) \\ FK(EH+HG+2HI) \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } \alpha^2 > FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

folgl. schneidet der Kreis die Linie MN (wie zu 1. Bew.).

$$\left.\begin{array}{r}\text{Da } \alpha^2 \\ FK.GS\end{array}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{array}{l}FK(EI+IG) \\ FK(2EI-EG)\end{array}\right.$$

$$\text{so ist } \left.\begin{array}{r}FK.ES \\ 2FK.E\beta\end{array}\right\} \overset{=}{>} 2FK.EI \quad \text{wenn } E\beta = \beta S;$$

$$\text{also } E\beta \overset{=}{>} EI$$

folglich liegt der Punkt L auf IC.

Auch ist $EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VI. Fall 1. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$. (Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.)

Z u s.

Buchstäblich, wie zu 1.

b.) Es sey $\alpha^2 < FK(EI+IG)$.

Determination.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Da } \alpha^2 \\ FK.GS\end{array}\right\} < \left\{\begin{array}{l}FK(EI+IG) \\ FK(2EI-EG)\end{array}\right.$$

$$\text{so ist } \left.\begin{array}{r}FK.ES \\ 2FK.E\beta\end{array}\right\} < 2FK.EI. \quad \text{wenn } E\beta = \beta S;$$

$$\text{also } E\beta < EI.$$

Damit der Punkt L auf IC falle, mufs also seyn

$$E\beta + \beta L \overset{=}{>} EI$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r}L\beta^2 \\ E\beta^2 - EH.GS\end{array}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{array}{l}(IE-E\beta)^2 \\ IE^2 - \left\{\begin{array}{c}2IE \cdot E\beta \\ (EG+GS)IE\end{array}\right\} + E\end{array}\right.$$

$$\text{folglich}\ \left.\begin{array}{r}(IE-EH)GS\\ HI.GS\end{array}\right\}\ \geqq\ \left\{\begin{array}{l}IE(IE-EG)\\ EI.IG\end{array}\right.$$

$$\text{mithin}\ \left.\begin{array}{r}HI:IE\\ KF:FI\\ KF.IG:FI.IG\end{array}\right\}\ \geqq\ \left\{\begin{array}{l}IG:GS\\ FK.IG:\left\{\begin{array}{l}FK.GS\\ \alpha^2\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\text{somit}\ FI.IG \leqq \alpha^2.$$

Beweis.

$$\text{Es ist}\ HI > \sqrt{GH.HE}$$

$$\text{also}\ \left.\begin{array}{r}HI^2\\ (IE-EH)HI\end{array}\right\} + GH.HE > 2HI\sqrt{GH.HE}$$

$$\text{folglich}\ (GH-HI)HE > (2\sqrt{GH.HE}+IE)HI$$

$$\text{mithin}\ \left.\begin{array}{r}EH:HI\\ 2EH:2HI\end{array}\right\} > \left\{\begin{array}{l}2\sqrt{GH.HE}-IE:\left\{\begin{array}{l}GH-HI\\ GI-2HI\end{array}\right.\\ 2\sqrt{GH.HE}-IE+2EH:GI\end{array}\right.$$

$$\text{somit}\ \left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}EH+HI\\ EI\end{array}\right\}:HI\\ IF:FK\end{array}\right\} > \left\{\begin{array}{l}GI-IE+2EH\\ GH+HE\end{array}\right\}+2\sqrt{GH.HE}:GI$$

$$\text{demnach}\ FI.IG > FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{Da}\ \alpha^2 \geqq FI.IG\ \text{(Det.)}$$

$$\text{so ist}\ \alpha^2 > FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

also schneidet der Kreis die Linie MN.

$$\text{Da}\ \alpha^2 < FK(EI+IG)$$

$$\text{so ist}\ E\beta < EI\ \text{(wie Det.)}$$

$$\text{Da}\ \alpha^2 \geqq FI, IG$$

$$\text{so ist}\ E\beta+\beta L \geqq EI$$

wie aus der Det. leicht hervorgehet, also fällt der Punkt L auf IC.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Auch ist } EV.GL = PG.GS \\ \hline \text{also } FX.GL = \alpha^2.\end{array}\right\}\text{wie zu 1. Bew.}$$

Z u s.

Der zweite Durchschnitt R′ bestimmt zwey Segmente FX′, GL′ auf den Linien FB, GI mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet, und welches Fall 2. ist.

F a l l 2. (Fig. 58.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GI liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX′, GL′ die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL′ in V′ schneidende, gerade Linie EV′ ⧺ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r}FX':EV'\\ \left.\begin{array}{r}FX'.GL'\\ \alpha^2\end{array}\right\}:EV'.GL'\end{array}\right\}= FO:OE$$

also ist EV′.GL′ gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib I. Loc. VI. Fall 1. reducirt.

C o n s t r u c t i o n.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

1.) Es sey $HI \gtreqless \sqrt{GH.HE}$.

D e t e r m i n a t i o n.

Da verm. Lib. I. Loc. VI. Fall 1. Det.

$PG.GS \geqq OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$ werden muſs,

$$\text{also } FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) \leqq \left\{ \begin{matrix} \alpha^2 \text{(wie Lib.II. Loc.I. Fall 5. Det.)} \\ FK.GS \end{matrix} \right.$$

$$\text{folglich } GH+HE+2\sqrt{GH.HE} \leqq GS$$

$$\text{so muſs auch } \left. \begin{matrix} GH+HE+2HI \\ GI+IE \\ 2EI-EG \end{matrix} \right\} \leqq GS \text{ seyn}$$

$$\text{mithin } 2EI \leqq \left\{ \begin{matrix} SG+GE \\ 2E\beta, \text{wenn } E\beta=\beta S; \end{matrix} \right.$$

$$\text{somit } EI \leqq E\beta$$

Damit also der Punkt L auf IC falle, muſs seyn

$$\left. \begin{matrix} EL' \\ E\beta-\beta L' \end{matrix} \right\} \leqq EI$$

$$\text{folglich } FI.IG \leqq \alpha^2 \text{(wie Fall 1. 1.Zus.)}$$

B e w e i s.

$$\text{Es ist } HI \leqq \sqrt{GH.HE}$$

$$\text{also } \left. \begin{matrix} HI^2 \\ (IE-EH)HI \end{matrix} \right\} + GH.HE \geqq 2HI\sqrt{GH.HE}$$

$$\text{folglich } (GH-HI)HE \geqq (2\sqrt{GH.HE}-IE)HI$$

$$\text{mithin } \left. \begin{matrix} EH:HI \\ 2EH:2HI \end{matrix} \right\} \geqq \left\{ \begin{matrix} 2\sqrt{GH.HE}-IE : \left\{ \begin{matrix} GH-HI \\ GI-2HI \end{matrix} \right. \\ 2\sqrt{GH.HE}-IE+2EH : GI \end{matrix} \right.$$

$$\text{somit } \left. \begin{matrix} \left. \begin{matrix} EH+HI \\ EI \end{matrix} \right\} : HI \\ IF : FK \end{matrix} \right\} \geqq \left\{ \begin{matrix} GI-IE+2EH \\ GH+HE \end{matrix} \right\} + 2\sqrt{GH.HE} : GI$$

demnach $FI.IG \overset{=}{>} FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$

Da $\alpha^2 \overset{=}{>} FI.IG$ (Det.)

so ist auch $\alpha^2 \overset{=}{>} FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$

folglich $PG.GS \overset{=}{>} OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$

also berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN (Lib. I. Loc. VI. Fall 1. Bew.).

Da $FI.IG \overset{=}{<} \alpha^2$

so ist $E\beta - \beta L' \overset{=}{<} EI$

mithin fällt der Punkt L' auf IH.

Auch ist $EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VI. Fall 1. Bew.)

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. 1. Zus. 2.).

Z u s.

Der zweite Durchschnitt R bestimmt zwey Segmente FX, GL auf den Linien FI, GC mit der gegebenen Eigenschaft, wie leicht erhellet, und welches Fall 1. ist.

2) Es sey $HI > \sqrt{GH.HE}$.

a.) Es sey $\alpha^2 \overset{=}{>} FK(GI+IE)$

D e t e r m i n a t i o n.

Es ist $\left.\begin{matrix}\alpha^2\\ FK.GS\end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix}FK(GI+IE)\\ FK(GH+HE+2HI)\end{matrix}\right.$

also $GS \underset{>}{=} \begin{cases} GH+HE+2HI \\ GI+IE \\ 2EI-EG \end{cases}$

folglich $2E\beta \underset{>}{=} 2EI$, wenn $E\beta = \beta S$;

mithin $E\beta \underset{>}{=} EI$.

Damit also der Punkt L′ auf HI falle, muſs seyn

$E\beta - \beta L' \underset{<}{=} EI$

folglich $FI.IG \underset{<}{=} \alpha^2$ (wie Fall 1. 1. Zus.).

Beweis.

Es ist $HI > \sqrt{GH.HE}$

also schneidet der Kreis die Linie MN (wie Fall 1. 2. b. Bew.)

Es ist $FI.IG \underset{<}{=} \alpha^2$ (Det.).

also $E\beta - \beta L' \underset{<}{=} EI$

wie aus der Det. erhellet, mithin liegt der Punkt L′ auf HI.

Auch ist $EV'.GL' = PG.GS$
demnach $FX'.GL' = \alpha^2$. } (wie zu 1. Bew.)

Zus.

Buchstäblich, wie 1. Zus.

b.) Es sey $\alpha^2 < FK(GI+IE)$.

Determination.

Verm. Lib. I. Loc. VI. Fall 1. Det. muſs seyn

$$\frac{PG.GS \gtreqless OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})}{\text{also } FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) \lesseqgtr \alpha^2}$$ (wie Lib. II. Loc. I. Fall 5. Det.).

B e w e i s.

Es ist $FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) \lesseqgtr \alpha^2$

also $PG.GS \gtreqless OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$

folglich berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN.

$$\text{Da } \left.\begin{matrix}\alpha^2\\ FK.GS\end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix}FK(GI+IE)\\ FK(GH+HE+2HI)\end{matrix}\right.$$

$$\text{also } GS < \left\{\begin{matrix}GH+HE+2HI\\ 2EI-EG\end{matrix}\right.$$

folglich $2E\beta < 2EI$, wenn $E\beta = \beta S$;
so liegt der Punkt L' auf HI.

Auch ist $EV'.GL' = PG.GS$
folglich $FX'.GL' = \alpha^2$. (wie zu 1. Bew.)

Z u s.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie HC in L so, dafs, wenn die, die geraden Linien EV, AB in V, X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird,

$EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VI. Fall. 1. Zus. 2.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.).

Und es liegt der Punkt L auf der Verlängerung von HI, oder in I, oder zwischen H, I, je nachdem

$$E\beta + \beta L \gtreqless EI$$

---

also FI. IG $\lesseqgtr$ α^2 (wie aus Fall 1. 2. b. Det. leicht erhellet.)

Es ist mithin eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FI, GC, oder FB, GI Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 1. oder Fall 2. ist.

Fall 3. (Fig. 59.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GH liegen.

Anal. Constr. Bew.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. IV. Fall 2.

Zus.

Der zweite Durchschnitt R' bestimmt zwey Segmente FX', GL' auf den Linien FK, GD mit der gegebenen Eigenschaft, wie aus Lib. I. Loc. VI. Fall 2. Zus. 2. erhellet, und welches Fall 5. ist.

Fall 4. (Fig. 60.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GE liegen.

Anal. Constr. Det. Bew. Zus.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. IV. Fall 3.

Fall 5. (Fig. 59.)

Die Segmente sollen auf den Linien FK, GD liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX′, GL′ die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL′ in V′ schneidende, gerade Linie EV′ ‡ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FX':EV' \\ \left.\begin{array}{c} FX'.GL' \\ \alpha^2 \end{array}\right\}:EV'.GL' \end{array}\right\} = FO:OE$$

also ist EV′. GL′ gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. VI. Fall 4. reducirt.

C o n s t r u c t i o n.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1.

B e w e i s.

Es ist EV′. GL′ = PG. GS (Lib. I. Loc. VI. Fall 4. Bew.)

also FX′. GL′ = α^2 (wie Lib. II. Loc. III. Fall. 1. Zus.).

Z u s.

Der zweite Durchschnitt R bestimmt Segmente auf den Linien FA, GH mit der gegebenen Eigenschaft, wie Lib. II. Loc. IV. Fall 5. Zus., welches Fall 3. ist.

γ.) Der Punkt G liege auf der Verlängerung von HE. (Fig. 61—63.). (Loc. XIII.).

F a l l 1. (Fig. 61.)

Die Segmente sollen auf den Linien FK, GD liegen.

Anal. Constr. Bew.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 2.

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf dieser Linie, so schneidet dasselbe die Linie EH (verm. Lib. I. Loc. IV. Fall 1. Zus. 2.) so, dafs, wenn die, die Linien EV, FB in X', V' schneidende, gerade Linie OL' gezogen wird,

$$EV'.GL' = PG.GS$$

also $FX.'GL' = \alpha^2$

mithin ist eine Linie OL' gefunden, welche von den Linien FA, GH Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 3. ist.

Fall 2. (Fig. 62.)

Die Segmente sollen auf den Linien FK, GE liegen.

Anal. Constr. Det.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 1. A.

Beweis.

Es ist $FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE}) \overline{\overline{>}} \alpha^2$ (Det.)

also berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN.

Auch ist $EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. IV. Fall 2. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Zus.

Der zweite Durchschnitt R′ bestimmt, wie aus Lib. I. Loc. IV. Fall 2. Zus. 2. erhellet, zwey andere Segmente auf denselben Linien mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet.

Fall 3. (Fig. 61.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GH liegen.

Anal. Constr. Bew.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall. 4.

Zus.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 4. Zus., wenn man FK, GD, Fall 1. statt FA, GC, Fall 2. setzt.

Fall 4. (Fig. 63.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, GC liegen.

Anal. Contsr.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 5.

1.) Es sey $HI \overline{\gtrless} \sqrt{GH.HE}$.

Determination.

Vermöge Lib. I. Loc. IV. Fall 4. Det. muſs seyn

$PG.GS \overline{\gtrless} OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$

also $FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) \overline{\lessgtr} \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. I. Fall 5. Det.)

Beweis.

Es ist $FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) \overline{\lessgtr} \alpha^2$

folglich $FG.GS \geqq OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$

mithin berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN.

$$\text{Da } HI \leqq \sqrt{GH.HE}$$

$$\text{so ist } FK(GH+HE+2HI) \leqq \left\{ \begin{matrix} \alpha^2 \\ FK.GS \end{matrix} \right.$$

$$\text{also } \left. \begin{matrix} GH+HE+2HI \\ GI+IE \end{matrix} \right\} < GS$$

$$\text{folglich } 2EI \geqq \left\{ \begin{matrix} SG-GE \\ 2E\beta, \text{ wenn } E\beta = \beta S; \end{matrix} \right.$$

$$\text{mithin } EI \leqq E\beta$$

demnach fällt der Punkt L auf IC.

Auch ist $EV.GL = FG.GS$ (Lib. I. Loc. IV. Fall 4. Bew.)

somit $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.)

Z u s.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf MN, so schneidet dasselbe die Linie HS in einem Punkte L' so, daſs, wenn die, die Linien EV, AB in V', X' schneidende, gerade Linie OL' gezogen wird,

$EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. IV. Fall 4. Zus. 2.)

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.).

Und es liegt der Punkt L' zwischen H, I, oder in I, oder auf der Verlängerung von HI, je nachdem

$$\left.\begin{matrix}EL'\\E\beta-\beta L'\end{matrix}\right\}\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\ EI$$

$$\begin{matrix}\text{also }(\beta E-EI)^2\\E\beta^2-\left\{\begin{matrix}2\beta E.EI\\(SG-GE)EI\end{matrix}\right\}+EI^2\end{matrix}\ \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\ \left\{\begin{matrix}\beta L'^2\\E\beta^2-EH.GS\end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich}\ \left.\begin{matrix}EI(IE+EG)\\EI.IG\end{matrix}\right\}\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\left\{\begin{matrix}GI(IE-EH)\\GS.HI\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin}\ \left.\begin{matrix}HI:IE\\KF:FI\\KF.IG:FI.IG\end{matrix}\right\}\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\left\{\begin{matrix}IG:GS\\KF.IG:\left\{\begin{matrix}KF.GS\\\alpha^2\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$$

$$\text{somit}\ FI.IG\ \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\ \alpha^2.$$

Es ist also auch eine Linie OL′ gefunden, welche von den Linien FB, GI, oder FI, GS Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 5. oder Fall 4. ist.

2.) Es sey $HI > \sqrt{GH.HE}$.

a.) Es sey $\alpha^2 \begin{matrix}=\\>\end{matrix} FK(EI+IG)$.

Beweis.

$$\text{Es ist}\ \alpha^2\ \begin{matrix}=\\>\end{matrix}\left\{\begin{matrix}FK(EI+IG)\ (\text{hyp.})\\FK(EH+HG+2HI)\end{matrix}\right.$$

$$\text{also}\ \alpha^2 > FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

mithin schneidet der Kreis die Linie MN (wie zu 1. Bew.).

$$\text{Da } \left.\begin{array}{r}\alpha^2\\ FK.GS\end{array}\right\} \geqq \left\{\begin{array}{l}FK(EI+IG)\\ FK(2IE+EG)\end{array}\right.$$

$$\text{so ist } \left.\begin{array}{r}FK.ES\\ 2FK.E\beta\end{array}\right\} \geqq 2FK.EI \qquad \text{wenn } E\beta = \beta S;$$

$$\text{folglich } E\beta \geqq EI$$

mithin liegt der Punkt L auf IC.

Auch ist $EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. IV. Fall. 4. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Z u s.

Buchstäblich, wie zu 1.

b.) Es sey $\alpha^2 < FK(EI+IG)$.

Determination.

$$\text{Da } \left.\begin{array}{r}\alpha^2\\ FK.GS\end{array}\right\} < \left\{\begin{array}{l}FK(EI+IG)\\ FK(2IE+EG)\end{array}\right.$$

$$\text{so ist } \left.\begin{array}{r}FK.ES\\ 2FK.E\beta\end{array}\right\} < 2FK.IE$$

$$\text{also } E\beta < EI.$$

Damit nun der Punkt L auf IC falle, muſs seyn

$$\left.\begin{array}{r}EL\\ E\beta+\beta L\end{array}\right\} \geqq EI$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r}\beta L^2\\ E\beta^2 - EH.GS\end{array}\right\} \leqq \left\{\begin{array}{l}(IE-E\beta)^2\\ IE^2 - \left\{\begin{array}{l}2IE.E\beta\\ (SG\text{-}GE)EI\end{array}\right\} + E\beta^2\end{array}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}(IE-EH)GS \\ HI.GS\end{matrix}\right\} \gtreqqless \left\{\begin{matrix}IE(IE+EG) \\ GI.IE\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix}HI:IE \\ KF:FI \\ KF.IG:FI.IG\end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix}IG:GS \\ KF.IG:\left\{\begin{matrix}KF.GS \\ \alpha^2\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } FI.IG \leqq \alpha^2.$$

B e w e i s.

$$\text{Es ist } HI > \sqrt{GH.HE}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}HI^2 \\ HI(IE-EH)\end{matrix}\right\} + GH.HE > 2HI\sqrt{GH.HE}$$

$$\text{folglich } (GH-HI)HE > (2\sqrt{GH.HE} - EI)HI$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix}EH:HI \\ 2EH:HI\end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix}2\sqrt{GH.HE} - EI : \left\{\begin{matrix}GH-HI \\ GI-2HI\end{matrix}\right. \\ 2\sqrt{GH.HE} - EI + 2EH : GI\end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}EH+HI \\ EI\end{matrix}\right\}:HI \\ IF:FR\end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix}GI-IE+2EH \\ GH+HE\end{matrix}\right\} + 2\sqrt{GH.HE}:IG$$

$$\text{demnach } FI.IG > FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{Es ist aber } \alpha^2 \geqq FI.IG \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } \alpha^2 > FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

folglich schneidet der Kreis die Linie MN.

$$\text{Da } \alpha^2 < FK\,(EI+IG) \text{ (hyp.)}$$

$$\text{so ist } E\beta < EI \text{ (wie Det.)}$$

$$\text{Weil } \alpha^2 \overset{=}{>} \overline{FI.IG} \text{ (Det.)}$$

$$\text{so ist } \left.\begin{matrix} E\beta + \beta L \\ EL \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} EI$$

wie aus der Determ. leicht hervorgehet, also fällt der Punkt L auf IC.

$$\left.\begin{matrix} \text{Auch ist } EV.GL = PG.GS \\ \hline \text{also } FX.GL = \alpha^2. \end{matrix}\right\} \text{wie zu 1. Bew.}$$

Z u s.

Der zweite Durchschnitt R′ bestimmt zwey Segmente auf den Linien FB, GI mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet, und welches Fall 5. ist.

F a l l 5. (Fig. 63.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GI liegen.

A n a l y s i s.

Es seyen FX′, GL′ die gesuchten Segmente; es seyen auch die, die Linie CD in E schneidende, gerade Linie OF und die, die Linie OL′ in V′ schneidende, gerade Linie EV′ ⋕ AB gezogen, so ist

$$\left.\begin{matrix} FX' : EV' \\ \left.\begin{matrix} FX'.GL' \\ \alpha^2 \end{matrix}\right\} : EV'.GL' \end{matrix}\right\} = FO : OE$$

also ist EV′. GL′ gegeben, mithin die Aufgabe auf Lib. I. Loc. IV. Fall 4. reducirt.

C o n s t r u c t i o n.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. I. Fall 3.

1.) Es sey $HI \leqq \sqrt{GH.HE}$.

Determination.

Verm. Lib. I. Loc. IV. Fall 4. Det. muſs seyn

$$PG.GS \geqq OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{also } FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) \leqq \begin{cases} \alpha^2 (\text{wie Lib. II. Loc. I.} \\ FK.GS \text{ Fall 5. Det.)} \end{cases}$$

$$\text{folglich } GH+HE+2\sqrt{GH.HE} \leqq GS$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} GH+HE+2HI \\ GI+IE \\ 2IE+EG \end{matrix}\right\} \leqq GS$$

$$\text{somit } 2IE \leqq \begin{cases} SG-GE \\ 2E\beta, \text{wenn } E\beta = \beta S; \end{cases}$$

$$\text{demnach } IE \leqq E\beta.$$

Damit also der Punkt L' auf EI falle, muſs

$$\left.\begin{matrix} EL' \\ E\beta - \beta L' \end{matrix}\right\} \leqq EI \text{ seyn}$$

$$\text{folglich } FI.IG \leqq \alpha^2 (\text{wie Fall 4. 1. Zus.}).$$

Beweis.

$$\text{Es ist } HI \leqq \sqrt{GH.HE}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} HI^2 \\ (IE-EH)HI \end{matrix}\right\} + GH.HE \geqq 2HI\sqrt{GH.HE}$$

$$\text{folglich } (GH-HI)HE \geqq (2\sqrt{GH.HE} - EI)IH$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} EH:HI \\ 2EH:2HI \end{matrix}\right\} \geqq \begin{cases} 2\sqrt{GH.HE} - EI : \begin{cases} GH-HI \\ GI-2HI \end{cases} \\ 2\sqrt{GH.HE} - EI + 2EH : GI \end{cases}$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} EH+HI \\ EI \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} IH \\ \\ IF : FK \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} GI\text{-}IE+2EH \\ GH+HE \end{matrix}\right\} + 2\sqrt{GH.HE} : GI$$

$$\text{demnach } FI.IG \overset{=}{>} FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{also } \alpha^2 \overset{=}{>} FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$$

folglich schneidet der Kreis die Linie MN (wie Fall 4. 1. Bew.).

$$\text{Da } FI.IG \overset{=}{<} \alpha^2$$

$$\text{so ist } \left.\begin{matrix} E\beta-\beta L' \\ EL' \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} EI$$

wie aus der Determ. leicht hervorgehet.

Auch ist $EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. IV. Fall 4. Bew.)

mithin $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.).

Z u s.

Der zweite Durchschnitt R bestimmt zwey Segmente auf den Linien FI, GC mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet, und welches Fall 4 ist.

2) Es sey $HI > \sqrt{GH.HE}$.

a.) Es sey $\alpha^2 \overset{=}{>} FK(GI+IE)$.

D e t e r m i n a t i o n.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix} \alpha^2 \\ FK.GS \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} FK(GI+IE) \\ FK(GH+HE+2HI) \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } GS \gtreqqless \begin{cases} GH+HE+2HI \\ GI+IE \\ 2IE+EG \end{cases}$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} SG\text{-}GE \\ 2E\beta \end{matrix}\right\} \gtreqqless 2IE \quad \text{, wenn } E\beta = \beta S\text{;}$$

$$\text{mithin } E\beta \gtreqqless EI.$$

Damit also der Punkt L′ auf HI falle, mufs seyn

$$E\beta - \beta L' \lesseqgtr EI$$

$$\text{folglich } FI.IG \lesseqgtr \alpha^2 \text{ (wie Fall 4. 1. Zus.).}$$

B e w e i s.

$$\text{Es ist } HI > \sqrt{GH.HE}$$

also schneidet der Kreis die Linie MN (wie Fall 4. 2. b. Bew.).

$$\text{Da } FI.IG \lesseqgtr \alpha^2 \text{ (Det.).}$$

$$\text{so ist } E\beta - \beta L' \lesseqgtr EI$$

wie aus der Det. leicht erhellet, mithin liegt der Punkt L′ auf HI.

$$\left.\begin{matrix} \text{Auch ist } EV'.GL' \doteq PG.GS \\ \text{demnach } FX'.GL' = \alpha^2. \end{matrix}\right\} \text{(wie 1. Bew.)}$$

Z u s.

Buchstäblich, wie 1. Zus.

b.) Es sey $\alpha^2 < FK(GI+IE)$.

D e t e r m i n a t i o n.

Verm. Lib. I. Loc. IV. Fall 4. Det. mufs seyn

$$\frac{PG.GS \overline{\gtrless} OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})}{}$$

also $FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) \overline{\lessgtr} \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. I. Fall 5. Det.).

Beweis.

Es ist $FK(GH+HE+2\sqrt{GH.HE}) \overline{\lessgtr} \alpha^2$

also $PG.GS \overline{\gtrless} OH(GH+HE+2\sqrt{GH.HE})$

folglich berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN (Lib. I. Loc. IV. Fall 4. Bew.).

$$\text{Da } \left.\begin{matrix}\alpha^2\\ FK.GS\end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix}FK(GI+IE)\\ FK(GH+HE+2HI)\end{matrix}\right.$$

$$\text{also } GS < \left\{\begin{matrix}GH+HE+2HI\\ 2IE+EG\end{matrix}\right.$$

$$\text{folgl. } \left.\begin{matrix}SG-GE\\ 2E\beta\end{matrix}\right\} < 2IE$$

$$\text{mithin } E\beta < IE$$

so liegt der Punkt L′ zwischen H, I.

$$\left.\begin{matrix}\text{Auch ist } EV'.GL' = PG.GS\\ \text{also } FX'.GL' = \alpha^2.\end{matrix}\right\}\text{(wie 1. Bew.)}$$

Zus.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie MN ein Perpendikel auf MN, so schneidet dasselbe die Linie HC so, daſs, wenn die, die geraden Linien EV, AB in V, X schneidende, gerade Linie OL gezogen wird,

$EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. IV. Fall. 1. Zus. 2.)

also $IX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.).

Und es liegt der Punkt L auf der Verlängerung von HI, oder in I, oder zwischen H, I, je nachdem

$$E\beta + \beta L \gtreqless EI$$

also $FI.IG \lesseqgtr \alpha^2$ (wie aus Fall 4. 2. b. Det. leicht hervorgehet.)

Es ist mithin eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FI, GC, oder FB, GI Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 4. oder Fall 5. ist.

c.) *Der Punkt G liege auf der Linie HI.* (Fig. 64—66.). (Loc. XIV.).

F a l l 1. (Fig. 64.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GC liegen.

A n a l. C o n s t r.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. III. Fall 1.

D e t e r m i n a t i o n.

Damit der Punkt L auf IC falle, muſs

$$E\beta + \beta L \geqq EI \text{ seyn}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{also } \beta L^2 \\ E\beta^2 - EH.GS\end{array}\right\} \geqq \left\{\begin{array}{l}(IE - E\beta)^2 \\ IE^2 - 2IE.E\beta + E\beta^2\end{array}\right.$$

$$\text{folglich} \left.\begin{matrix}(IE-EH)GS \\ HI.GS\end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix}(IE-EG)IE \\ EI.IG\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin} \left.\begin{matrix}HI:IE \\ KF:FI \\ KF.IG:FI.IG\end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix}IG:GS \\ FK.IG:\left\{\begin{matrix}FK.GS \\ a^2\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } FI.IG \leqq a^2.$$

Beweis.

Es ist $EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VII. Fall 1. Bew.)

also $FX.GL = a^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.).

Da $FI.IG \leqq a^2$

so ist $E\beta + \beta L \geqq EI$, wie aus der Det. leicht hervorgehet, also liegt auch der Punkt L auf IC.

Zus.

Verm. Lib. I. Loc. VII. Fall 1. Zus. 2. schneidet ein, in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie MN auf dieser Linie errichtetes, Perpendikel die Linie EH in dem Punkte L' so, dafs, wenn die Durchschnittspunkte mit den Linien EV, FB mit V', X' bezeichnet werden,

$$EV'.GL' = PG.GS$$

$$\begin{aligned} \text{also} \left.\begin{matrix}PU.UW \\ a^2\end{matrix}\right\}: EV'.GL' &= PU.UW : PG.GS \\ &= UP : PG \\ &= FO : OE \\ &= FX' : EV' \\ &= FX'.GL' : EV'.GL' \end{aligned}$$

$$\text{folglich } FX'.GL' = a^2.$$

mithin ist eine Linie OL′ gefunden, welche von den Linien FA, GE Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 3. ist.

Fall 2. (Fig. 65.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GI liegen.

Anal. Constr.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Determination.

Damit L auf IG falle, mufs seyn $E\beta + \beta L \overline{\gtrless} EI$

also $\overline{FI.IG} \overline{\gtrless} \alpha^2$

wie aus Fall 1. Det. leicht hervorgehet.

Beweis.

Es ist $\overline{EV.GL = PG.GS}$ } wie Fall 1. Bew.

also $FX.GL = \alpha^2$.

Da $\overline{FI.IG \overline{\gtrless} \alpha^2}$

so ist $E\beta + \beta L \overline{\gtrless} EI$.

also liegt der Punkt L auf IG.

Zus.

Buchstäblich, wie Fall 1. Zus.

Fall 3. (Fig. 66.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GH liegen.

Anal. Constr. Bew.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. III. Fall 2.

Zus.

Der zweite Durchschnitt R′ bestimmt, wie aus Lib. I. Loc. VII. Fall 2. Zus. 2. erhellet, Segmente FX′, GL′ auf den Linien FK, GD mit der gegebenen Eigenschaft, welches Fall 5. ist.

Fall 4. (Fig. 64.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GE liegen.

Anal. Constr. Bew.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. III. Fall 3.

Zus.

Der zweite Durchschnitt R bestimmt, vermöge Lib. I. Loc. VII. Fall 3. Zus. 2., Segmente FX, GL auf den Linien FB, GC mit der gegebenen Eigenschaft, und es liegt L zwischen G, I, oder in I, oder auf der Verlängerung von GI, je nachdem

$$E\beta + \beta L \lesseqgtr EI$$

$$\text{also } FI.IG \gtreqless \alpha^2$$

wie aus Fall 2. 1. Det. erhellet, welches Fall 2. oder Fall 1. ist.

Fall 5. (Fig. 66.)

Die Segmente sollen auf den Linien FK, GD liegen.

A n a l. C o n s t r.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. III. Fall 5.

B e w e i s.

Es ist $\frac{EV'.GL'}{}$ = PG. GS (Lib. I. Loc. VII. Fall 4. Bew.)

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall. 1. Zus.).

Z u s.

Der zweite Durchschnitt R bestimmt, wie aus Lib. I. Loc. VII. Fall 4. Zus. 2. erhellet, zwey Segmente FX, GL auf den Linien FB, GH mit der gegebenen Eigenschaft, welches Fall 3. ist.

3.) *Der Punkt F liege auf IK. Der Punkt G liege*

A.) *auf der Linie IC.*

Ist erlediget durch Lib. II. Loc. IV. V. VI.

B.) *auf der Linie ID.*

a.) *in II.*

Ist erlediget durch Lib. II. Loc. IX.

b.) *auf der Verlängerung von IH.*

Ist erlediget durch Lib. II. Loc. XIV.

c.) *auf der Linie IH.* (Fig. 67—69.). (Loc. X.)

F a l l 1. (Fig. 67.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GD liegen.

Anal. Constr. Det. Bew. Zus.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. IV. Fall 1.

Fall 2. (Fig. 68.)

Die Segmente sollen auf den Linien FA, GC liegen.

Anal. Constr. Bew.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. IV. Fall 2.

Zus.

Der zweite Durchschnitt R′ bestimmt zwey Segmente FX′, GL′ auf den Linien FK, GC mit der gegebenen Eigenschaft, wie Lib. II. Loc. IV. Fall 2. Zus., welches Fall 5. ist.

Fall 3. (Fig. 69.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GI liegen.

Anal. Constr.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. IV. Fall 3.

1.) Es sey $HI \gtreqless \sqrt{GH.HE}$.

Determination.

Verm. Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Det. muſs seyn

$$PG.GS \gtreqless OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{also } \alpha^2 \gtreqless FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{Da } HI \gtreqless \sqrt{GH.HE}$$

$$\text{so ist } FK(GH+HE-2HI) \geqq \left\{\begin{matrix} \alpha^2 \\ FK.GS \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} GH+HE-2HI \\ 2IE-EG \end{matrix}\right\} \geqq GS$$

$$\text{mithin } 2IE \geqq \left\{\begin{matrix} SG+GE \\ 2F\beta \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } IE \geqq E\beta.$$

Damit also der Punkt L auf IG falle, mufs seyn

$$\left.\begin{matrix} EL \\ E\beta+\beta L \end{matrix}\right\} \geqq EI$$

$$\left.\begin{matrix} \text{also } L\beta^2 \\ E\beta^2-EH.GS \end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix} (IE-E\beta)^2 \\ IE^2-\left\{\begin{matrix} 2IE.E\beta \\ IE(EG+GS) \end{matrix}\right\}+E\beta^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} IE(GE-EI) \\ EI.IG \end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix} SG(HE-EI) \\ HI.GS \end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} HI:IE \\ KF:FI \\ KF.IG:FI.IG \end{matrix}\right\} \leqq \left\{\begin{matrix} IG:GS \\ FK.IG:\left\{\begin{matrix} FK.GS \\ \alpha^2 \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } FI.IG \geqq \alpha^2.$$

B e w e i s.

$$\text{Es ist } HI \leqq \sqrt{GH.HE}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{also } HI^2 \\ HI(HE-EI) \end{matrix}\right\} +GH.HE \geqq 2HI\sqrt{GH.HE}$$

$$\text{folglich } (GH+HI)HE \geqq (2\sqrt{GH.HE}+IE)HI$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} EH:HI \\ 2EH:2HI \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} 2\sqrt{GH.HE} + EI : \left\{\begin{matrix} GH+HI \\ 2HI-IG \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } EH:HI \overset{=}{<} 2EH-EI-2\sqrt{GH.HE}:IG$$

$$\text{demn. } \left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} EH-HI \\ EI \end{matrix}\right\}:HI \\ IF:FK \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix} 2EH-EI-IG \\ GH+HE \end{matrix}\right\} - 2\sqrt{GH.HE}:IG$$

$$\text{also } FI.IG \overset{=}{<} FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{Da } \alpha^2 \overset{=}{<} FI.IG \text{ (Det.)}$$

$$\text{so ist } \alpha^2 \overset{=}{<} FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{folglich } PG.GS \overset{=}{<} OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

demnach berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN.

$$\text{Da } FI.IG \overset{=}{>} \alpha^2$$

$$\text{so ist } EL \overset{=}{>} EI$$

wie aus der Determ. erhellet, also fällt der Punkt L auf GI.

Auch ist $EV.GL = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Bew.)

also $FX.GL = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Bew.)

Z u s.

Der zweite Durchschnitt R′ bestimmt eine Linie OL′ auf den Linien FI, GC mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet, und welches Fall 4. ist.

2.) Es sey $HI > \sqrt{GH.HE}$.

a.) Es sey $\alpha^2 \overline{\overline{>}} FK(EI-IG)$.

Determination.

Verm. Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Det. mufs seyn

$PG.GS \overline{\overline{<}} OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

also $\alpha^2 \overline{\overline{>}} FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$.

Beweis.

Es ist $FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE}) \overline{\overline{>}} \alpha^2$

also berührt, oder schneidet (wie zu 1.) der Kreis die Linie MN.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Da } \alpha^2 \\ FK.GS\end{array}\right\} \overline{\overline{>}} FK(EI-IG)$$

$$\text{so ist } GS \overline{\overline{>}} \left\{\begin{array}{l} EI-IG \\ 2EI-IG \end{array}\right.$$

also $2E\beta \overline{\overline{>}} 2EI$, wenn $E\beta = \beta S$;

folglich $E\beta \overline{\overline{>}} EI$

mithin liegt der Punkt L auf IG.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ferner ist } EV.GL = PG.GS \\ \text{also } FX.GL = \alpha^2\end{array}\right\} \text{wie zu 1. Bew.}$$

Zus.

Der zweite Durchschnitt R′ bestimmt (nach Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Zus. 2.) zwey Segmente FX′, GL′ auf den Linien FB, GC mit der gegebenen Eigenschaft. Und es liegt L′ zwischen E, I, oder in I,

oder zwischen I, G, je nachdem

$$E\beta - \beta L' \lesseqgtr EI$$

$$\text{also } (\beta E - EI)^2 \lesseqgtr \beta L'^2$$

$$\text{folglich } \alpha^2 \lesseqgtr FI.IG$$ (wie aus 1. Det. leicht hervorgehet.)

Es ist also eine Linie OL' gefunden, welche von den Linien FI, GC, oder FB, GI, Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 4. oder Fall 3. ist.

b.) Es sey $\alpha^2 < FK(EI - IG)$.

Determination.

$$\text{Da } \left.\begin{matrix}\alpha^2 \\ FK.GS\end{matrix}\right\} < FK(EI - IG)$$

$$\text{so ist } GS < \left\{\begin{matrix}EI - IG \\ 2EI - EG\end{matrix}\right.$$

also $2E\beta < 2EI$, wenn $E\beta = \beta S$;

folglich $E\beta < EI$.

Damit der Punkt L auf IG falle muſs also seyn

$$E\beta + \beta L \geqq EI$$

also $FI.IG \geqq \alpha^2$ (wie zu 1. Det.).

Beweis.

Es ist $HI > \sqrt{GH.HE}$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} HI^2 \\ HI(HE-EI) \end{matrix}\right\} + GH.HE > 2HI\sqrt{GH.HE}$$

$$\text{folglich } (GH+HI)\,HE > (2\sqrt{GH.HE} + EI)\,IH$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} EH:HI \\ 2EH:2HI \end{matrix}\right\} > 2\sqrt{GH.HE} + EI : \left\{\begin{matrix} GH+HI \\ 2HI-IG \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } EH:HI < 2EH-EI-2\sqrt{GH.HE} : IG$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} EH-HI \\ EI \end{matrix}\right\} : HI \\ IF:FK \end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix} 2EH-EI-IG-2\sqrt{GH.HE} \\ GH+HE \end{matrix}\right\} : IG$$

$$\text{also } FI.IG < FK\,(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{Da } \alpha^2 \leqq FI.IG$$

$$\text{so ist auch } \alpha^2 < FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

mithin schneidet der Kreis die Linie MN.

$$\text{Da } FI.IG \geqq \alpha^2$$

$$\text{so ist } E\beta+\beta L \geqq EI$$

wie aus der Determ. hervorgehet, also liegt der Punkt L auf IG.

$$\left.\begin{matrix} \text{Auch ist } EV.GL = PG.GS \\ \hline \text{also } FX.GL = \alpha^2. \end{matrix}\right\} \text{ wie zu 1. Bew.}$$

Z u s.

Der zweite Durchschnitt R′ bestimmt, wie aus Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Zus. 2. hervorgehet, zwey Segmente FX′, GL′ auf den Linien FI, GC mit der gegebenen Eigenschaft, welches Fall 4. ist.

Fall 4. (Fig. 69.)

Die Segmente sollen auf den Linien FI, GC liegen.

Anal. Constr.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. IV. Fall 5. wenn nur Fall 3. statt Fall 4. gesetzt wird.

1.) Es sey $HI \overset{=}{>} \sqrt{GH.HE}$.

a.) Es sey $\alpha^2 \overset{=}{<} FK(EI-IG)$.

Beweis.

$$\text{Es ist } \alpha^2 \overset{=}{<} \begin{cases} FK(EI-IG) \text{ (hyp.)} \\ FK(EH-HI+GH-HI) \\ FK(GH+HE-2HI) \end{cases}$$

$$\text{also } \alpha^2 \overset{=}{<} FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$$

folgl. berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Da } \alpha^2 \\ FK.\,GS \end{array}\right\} \overset{=}{<} FK(EI-IG)$$

$$\text{so ist } GS \overset{=}{<} 2EI-EG$$

$$\text{folglich } 2E\beta \overset{=}{<} EI, \text{ wenn } E\beta=\beta S;$$

$$\text{mithin } E\beta \overset{=}{<} EI$$

demnach liegt der Punkt L′ auf IE.

$$\text{Auch ist } EV'.GL' = PG.\,GS$$

$$\text{also } FX'.GL' = \alpha^2$$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.).

Zus.

Der zweite Durchschnitt R bestimmt, wie aus

Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Zus. 2. erhellet, die Segmente FX, GL mit der gegebenen Eigenchaft, und es liegt L zwischen I, G, oder in I, oder auf der Verlängerung von GI, je nachdem

$$E\beta + \beta L \gtreqless EI$$

also $FI.IG \gtreqless \alpha^2$, wie aus Fall 3. 1. Det. erhellet.

Es ist also auch eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FB, GI, oder FI, GC Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 3. oder Fall 4. ist.

b.) Es sey $\alpha^2 > FK(EI - IG)$.

Determination.

Verm. Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Det. mufs seyn

$$PG.GS \leqq OH(GH + HE - 2\sqrt{GH.HE})$$

$$\text{also } \alpha^2 \leqq FK(GH + HE - 2\sqrt{GH.HE}).$$

$$\text{Da } \alpha^2 > FK(EI - IG)$$

so ist $E\beta > EI$ (wie Fall 3. 2. a. Bew.).

Damit also der Punkt L′ auf IE falle, mufs seyn

$$E\beta - \beta L' \leqq EI$$

$$\text{also } (\beta E - EI)^2 \left\{ \leqq \right\} \beta L'^2$$

$$E\beta^2 - \left\{ \begin{matrix} 2IE.E\beta \\ IE(SG + GE) \end{matrix} \right\} + EI^2 \left\{ \leqq \right\} E\beta^2 - EH.GS$$

$$\text{folglich } \begin{matrix} GS(HE - EI) \\ GS.HI \end{matrix} \left\{ \leqq \right\} \begin{matrix} IE(GE - EI) \\ GI.IE \end{matrix}$$

$$\text{mithin} \left.\begin{matrix} HI : IE \\ KF : FI \\ KF.IG : FI.IG \end{matrix}\right\} \overline{\gtrless} \left\{\begin{matrix} IG : GS \\ KF.IG : \left\{\begin{matrix} KF.GS \\ \alpha^2 \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$

somit $FI.IG \overline{\gtrless} \alpha^2$.

Beweis.

Es ist $HI \overline{\gtrless} \sqrt{GH.HE}$

also $HI^2 + GH.HE \overline{\gtrless} 2HI\sqrt{GH.HE}$

folglich $PG.GS \overline{\lessgtr} OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$(buchst. wie Fall 3. 1. Bew.).

mithin berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN.

Da $FI.IG \overline{\gtrless} \alpha^2$

so ist $E\beta - \beta L' \overline{\lessgtr} EI$, wie aus der Det. leicht hervorgehet, also fällt der Punkt L' auf EI.

Auch ist $EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Bew.)

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall. 1. Zus. 2.).

Zus.

Der zweite Durchschnitt R bestimmt, wie aus Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Zus. 2. erhellet, zwey Segmente auf den Linien FB, GI mit der gegebnene Eigenschaft, welches Fall 4. ist.

2) Es sey $HI < \sqrt{GH.HE}$.

Determination.

Verm. Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Det. muſs seyn

$PG.GS \overline{\lessgtr} OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

also $\alpha^2 \overline{\lessgtr} FR(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

B e w e i s.

Es ist $\alpha^2 \overline{\gtrless} FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

also $PG.GS \overline{\gtrless} OH(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

folglich schneidet der Kreis die Linie MN.

Da $HI < \sqrt{GH.HE}$

so ist $GH+HE-2HI > GH+HE-2\sqrt{GH.HE}$

folgl. $FK(GH+HE-2HI) > FK(GH+HE-2\sqrt{GH.HE})$

mithin $FK(GH+HE-2HI > \begin{cases} \alpha^2 \\ FK.\ GS \end{cases}$

somit $\begin{rcases} GH+HE-2HI \\ 2IE-EG \end{rcases} > GS$

demnach $2IE > \begin{cases} SG+GE \\ 2E\beta \end{cases}$

also $IE > E\beta$

folglich fällt der Punkt L′ zwischen I, E.

Auch ist $EV'.GL' = PG.GS$ ⎫ wie vorhin.
also $FX'.GL' = \alpha^2.$ ⎭

Z u s.

Vermöge Lib. I. Loc. VI. Fall 3. Zus. 2. bestimmt der zweite Durchschnitt R zwey andere Segmente FX, GL mit der gegebenen Eigenschaft, wie leicht erhellet. Und es liegt der Punkt L zwischen G, I, oder in I, oder zwishen I, E, je nachdem

$$E\beta+\beta L \gtreqless EI$$

also $FI.IG \gtreqless \alpha^2$ (wie aus Fall 3. 1. Det. leicht erhellet.)

Es ist also auch eine Linie OL gefunden, welche von den Linien FB, GI, oder FI, GC, Segmente mit der gegebenen Eigenschaft abschneidet, welches Fall 3. oder Fall 4. ist.

Fall 5. (Fig. 68.)

Die Segmente sollen auf den Linien FB, GC liegen.

Anal. Constr.

Buchstäblich, wie zu Lib. II. Loc. IV. Fall 5.

Beweis.

Es ist $EV'.GL' = PG.GS$ (Lib. I. Loc. VI. Fall 4. Bew.)

also $FX'.GL' = \alpha^2$ (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1. Zus. 2.).

Zus.

Der zweite Durchschnitt R bestimmt, wie aus Lib. I. Loc. VI. Fall 4. Zus. 2. erhellet, zwey Segmente FX, GL auf den Linien FB, GH mit der gegebenen Eigenschaft, welches Fall 2. ist.

Bonn, gedruckt in der Büschler'schen Buchdruckerey.

l 5. (Fig. 68.)

llen auf den Linien FR, GC liegen

al. Constr.

ie zu Lib. II. Loc. IV. Fall 5.

Beweis.

= PG. GS (Lib. I. Loc. VI. Fall 4 Bew.)

= α^2 (wie Lib. II. Loc. III. Fall 1 Zus. 2.).

Zus.

rchschnitt R bestimmt, wie a

l 4. Zus. 2. erhellet, zwey Se

